普通高等教育“九五”国家级重点教材

教育部高等学校电子电气基础课程教学指导分委员会推荐教材

SIGNALS & SYSTEMS

信号与系统

第三版

下 册

郑君里 应启珩 杨为理

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

VISIT…

LANZAROTE Caliente.com

普通高等教育“九五”国家级重点教材

教育部高等学校电子电气基础课程教学指导分委员会推荐教材

信号与系统

Xinhao yu Xitong

第三版

下　册

郑君里　应启珩　杨为理

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书第一、二版分别于1981年和2000年与读者见面。第三版与前两版之研究范围、结构层次大体相同，仍然是讨论确定性信号经线性时不变系统传输与处理的基本概念和基本分析方法，从时域到变换域，从连续到离散，从输入输出描述到状态空间描述，以通信和控制工程作为主要应用背景，注重实例分析。

第三版保持了前两版之特色：注重结合基本理论融入各类工程应用实例，新版对这些例子进行了修订和更新，使全书具有强烈的时代感；保留了第六章信号矢量空间分析的内容，并有适当修订与补充，从而突显本书与国内、外同类教材的重要区别；全书结构有较大灵活性，可适用于通信电子类和非通信电子类的多种理工科专业的本科生教学。

全书共十二章，分两册装订，上、下册各六章，各章目与第二版基本一致。

图书在版编目(CIP)数据

信号与系统．下册/郑君里，应启珩，杨为理编著．—3版．北京：高等教育出版社，2011.3

ISBN 978-7-04-031518-9

Ⅰ．①信…　Ⅱ．①郑…　②应…　③杨…　Ⅲ．①信号系统-高等学校-教材　Ⅳ．①TN911.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第262026号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	咨询电话	400-810-0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn
			http://www.hep.com.cn
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
印　　刷	北京凌奇印刷有限责任公司		http://www.landraco.com.cn
		畅想教育	http://www.widedu.com
		版　　次	1981年10月第1版
开　　本	787×960　1/16		2011年3月第3版
印　　张	26	印　　次	2011年3月第1次印刷
字　　数	480 000	定　　价	37.70元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有　侵权必究

物料号　31518-00

作 者 声 明

未经本书作者和高等教育出版社允许,任何单位或个人均不得以任何形式将《信号与系统》第三版中的习题解答后出版,不得翻印或在出版物中选编、摘录本书的内容;否则,将依照《中华人民共和国著作权法》追究法律责任。

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》,其行为人将承担相应的民事责任和行政责任,构成犯罪的,将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序,保护读者的合法权益,避免读者误用盗版书造成不良后果,我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人给予严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为,希望及时举报,本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话: (010) 58581897/58581896/58581879

传　　真: (010) 82086060

E - mail: dd@hep.com.cn

通信地址: 北京市西城区德外大街4号

高等教育出版社打击盗版办公室

邮　　编: 100120

购书请拨打电话: (010)58581118

策划编辑　杜　炜

责任编辑　曲文利

封面设计　于文燕

责任绘图　宗小梅

版式设计　马敬茹

责任校对　胡晓琪

责任印制　尤　静

目 录

第七章 离散时间系统的时域分析 …… 1

7.1 引言 …… 1

7.2 离散时间信号——序列 …… 3

7.3 离散时间系统的数学模型 …… 9

7.4 常系数线性差分方程的求解 …… 15

7.5 离散时间系统的单位样值(单位冲激)响应 …… 27

7.6 卷积(卷积和) …… 31

7.7 解卷积(反卷积) …… 35

习题 …… 37

第八章 z 变换、离散时间系统的 z 域分析 …… 44

8.1 引言 …… 44

8.2 z 变换定义、典型序列的 z 变换 …… 45

8.3 z 变换的收敛域 …… 50

8.4 逆 z 变换 …… 55

8.5 z 变换的基本性质 …… 62

8.6 z 变换与拉普拉斯变换的关系 …… 75

8.7 利用 z 变换解差分方程 …… 80

8.8 离散系统的系统函数 …… 83

8.9 序列的傅里叶变换(DTFT) …… 88

8.10 离散时间系统的频率响应 …… 95

8.11 z 变换的应用实例 …… 103

习题 …… 110

第九章 离散傅里叶变换以及其他离散正交变换 …… 117

9.1 引言 …… 117

9.2 傅里叶变换的离散性与周期性 …… 118

9.3 从离散傅里叶级数到离散傅里叶变换 …… 124

9.4 离散傅里叶变换的性质 …… 130

9.5 离散傅里叶变换与 z 变换的关系 …… 139

9.6 快速傅里叶变换(FFT) …… 142

9.7 离散傅里叶变换的应用 …… 153

9.8 DFT(FFT)应用实例——OFDM 通信系统之实现 …… 160

9.9 沃尔什变换及其应用举例 …… 165
9.10 离散余弦变换(DCT) …… 174
习题 …… 176
第十章 模拟与数字滤波器 …… 182
10.1 引言 …… 182
10.2 模拟滤波器的逼近 …… 184
10.3 无源一端口模拟网络综合 …… 198
10.4 无源二端口模拟网络综合 …… 202
10.5 模拟滤波器的频率变换与元件变换 …… 214
10.6 无限冲激响应(IIR)数字滤波器 …… 224
10.7 有限冲激响应(FIR)数字滤波器 …… 240
10.8 *RC* 有源滤波器 …… 254
10.9 开关电容滤波器(SCF) …… 258
习题 …… 268
第十一章 反馈系统 …… 273
11.1 引言 …… 273
11.2 反馈系统的基本特性及其应用 …… 276
11.3 利用反馈系统产生自激振荡 …… 283
11.4 根轨迹 …… 287
11.5 奈奎斯特(Nyquist)稳定性判据 …… 296
11.6 信号流图 …… 303
习题 …… 316
第十二章 系统的状态变量分析 …… 324
12.1 引言 …… 324
12.2 连续时间系统状态方程的建立 …… 328
12.3 连续时间系统状态方程的求解 …… 339
12.4 离散时间系统状态方程的建立 …… 345
12.5 离散时间系统状态方程的求解 …… 353
12.6 状态矢量的线性变换 …… 357
12.7 系统的可控制性与可观测性 …… 362
习题 …… 371
附录四 几何级数的求值公式表 …… 378
附录五 序列的 z 变换表 …… 381
习题答案 …… 383
索　引 …… 400
参考书目 …… 406

第七章　离散时间系统的时域分析

7.1 引　　言

离散时间系统的研究源远流长。17 世纪发展起来的经典数值分析技术奠定了这方面的数学基础。20 世纪 40 和 50 年代，抽样数据控制系统的研究取得了重大进展。60 年代以后，计算机科学的进一步发展与应用标志着离散时间系统的理论研究和实践进入了一个新阶段。1965 年，库利(J.W.Cooley)与图基(J.W.Tukey)在前人工作的基础上发表了计算傅里叶变换高效算法的文章，这种算法称为快速傅里叶变换，缩写为 FFT。FFT 算法的出现引起了人们的巨大兴趣，迅速地得到了广泛应用。与此同时，超大规模集成电路研制的进展使得体积小、重量轻、成本低的离散时间系统有可能实现。在信号与系统分析的研究中，人们开始以一种新的观点——数字信号处理的观点来认识和分析各种问题。

20 世纪末期，数字信号处理技术迅速发展，应用日益广泛，例如在通信、雷达、控制、航空与航天、遥感、声呐、生物医学、地震学、核物理学、微电子学等诸多领域已卓见成效。随着应用技术的发展，离散时间信号与系统自身的理论体系逐步形成，并日趋丰富和完善。

离散时间系统的分析方法在许多方面与连续时间系统的分析方法有着并行的相似性。我们熟知，对于连续时间系统，其数学模型是用微分方程描述的。与之相应，离散时间系统是由差分方程表示的。差分方程与微分方程的求解方法在相当大的程度上一一对应。在连续时间系统中，卷积方法的研究与应用有着极其重要的意义；与此类似，在离散时间系统的研究中，卷积和(简称卷积)的方法具有同样重要的地位。在连续时间系统中，广泛地应用变换域方法——拉普拉斯变换与傅里叶变换方法，并运用系统函数的概念来处理各种问题；在离散时间系统中也同样普遍地运用变换域方法和系统函数的概念，这里的变换域方法包括 z 变换、离散傅里叶变换以及其他多种离散正交变换(如沃尔什变换、离散余弦变换等)。

在第三章和第五章曾讨论连续信号的抽样，这仅仅是给出离散时间信号的方式之一，作为离散时间信号源更为一般的例子如数字计算机系统的输出、输入信号以及各种直接给出的时间序列。通常，这里产生的各种数据流不一定与连

续信号有某种依从关系，因此，不能把离散时间信号狭隘地理解为连续信号的抽样或近似。

参照连续时间系统的某些方法学习离散时间系统理论的时候，必须注意它们之间存在着一些重要差异，这包括数学模型的建立与求解、系统性能分析以及系统实现原理等。正是由于差异的存在，才使得离散时间系统有可能表现出某些独特的性能。

与连续时间系统相比较，离散时间系统具有下列优点：容易做到精度高、可靠性好，便于实现大规模集成，从而在重量和体积方面显示其优越性。一般的数字系统中都包括有存储器，存储器的合理运用可以使系统具有灵活的功能，这些功能在连续时间系统中往往难以实现。此外，对于连续时间系统，通常只注重一维变量的研究，而在离散时间系统中，二维或多维技术得到广泛应用。近年来，由于可编程器件制作技术日趋成熟，对于数字系统容易利用可编程技术，借助于软件控制，适应用户设计与修改系统的各种需求，大大改善了设备的灵活性与通用性，在连续系统中这是难以实现的。

离散时间系统具有如此显著的优点，因而，离散时间系统（主要是数字信号处理系统）的应用几乎涵盖了国民经济建设与科学技术的所有领域，数字化技术逐步渗透到人类工作与生活的每个角落。近年来，人们提出了"数字地球"、"数字化世界"以及"数字化生存"等概念，以数字化的观念认识我们生存的这颗星球，充分利用数字信息技术推动社会的进步与发展。有人认为：在今天的孩童眼中，以数字化技术形成的光盘和信息网络就好像成年人眼中的空气和水一样平常。数字化生存如同一条鸿沟横亘于两代人之间，年长者必须迎头赶上。数字化浪潮正在席卷全球，数字信号处理技术正在使人类生产和生活质量提高到前所未有的新境界。

另一方面，不能认为数字化技术将取代一切连续时间系统的应用。实际上，人类在自然界中遇到的待处理信号相当多的部分都是连续时间信号，借助离散时间系统对其处理时，需经 A/D、D/A 转换，转换部分及其前后往往不能避免连续时间系统的出现；此外，当工作频率较高时，直接采用数字集成器件尚有一些困难，有时，用连续时间系统处理或许比较简便。因此，模拟信号处理与传输系统仍在一定范围内发挥作用。

在许多通信与电子设备中，经常遇到连续时间系统与离散时间系统组合构成的"混合系统"。例如，"软件无线电"（software radio）是继模拟通信、数字通信之后的最新一代通信技术。它是充分数字化的无线电通信系统，其 A/D、D/A 转换器尽可能靠近天线，在射频端与终端最低限度保留了部分连续时间系统。因而可将此系统看成一台带有天线的"超级"计算机。它充分发挥了数字系统的优点，利用可编程技术选择多种功能和体制，在通用化、模块化、兼容性、灵活性

诸方面使无线电通信设备的面貌焕然一新。软件无线电显示了当代数字化技术发展的最新特征，也说明了适当利用连续时间系统的必要性。实际上，在研究与开发新产品过程中，最佳地协调模拟与数字部件的组合已成为系统设计师的首要职责。

本章和第八章介绍离散时间系统的基本概念和基本分析方法，仍然是从时间域到变换域。第九章将连续与离散时间系统的某些问题交叉并行讨论，包括反馈及系统的状态空间分析。

7.2 离散时间信号——序列

在绪论中曾定义，表示离散信号的时间函数，只在某些离散瞬时给出函数值。因此，它是时间上不连续的“序列”。通常，给出函数值的离散时刻之间隔是均匀的。若此间隔为 T，以 $x(nT)$ 表示此离散时间信号，这里，nT 是函数的宗量，n 取整数（$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$）。在离散信号传输与处理设备中，有时将信号寄放在存储器中，可以随时取用。离散时间信号的处理也可能是先记录、后分析（即所谓“非实时”的），短时间存入的数据要在较长时间内才能完成分析。因此，考虑到这些因素，对于离散时间信号来说，往往不必以 nT 作为宗量，可以直接以 $x(n)$ 表示此序列。这里，n 表示各函数值在序列中出现的序号。也可以说，一个离散时间信号就是一组序列值的集合 $\{x(n)\}$。为书写简便，以 $x(n)$ 表示序列，不再加注外面的括号。$x(n)$ 可写成一般闭式的表达式，也可逐个列出 $x(n)$ 值。通常，把对应某序号 n 的函数值称为在第 n 个样点的“样值”。

离散时间信号也常用图解（即波形）表示，线段的长短代表各序列值的大小，有时，可将它们的端点连接起来。例如，图 7－1 示出某序列 $x(n)$ 的波形。虽然在此图中横轴绘成一条连续的直线，但是必须认识到，$x(n)$ 仅对 n 的整数值才有定义，对于 n 的非整数值，$x(n)$ 没有意义。

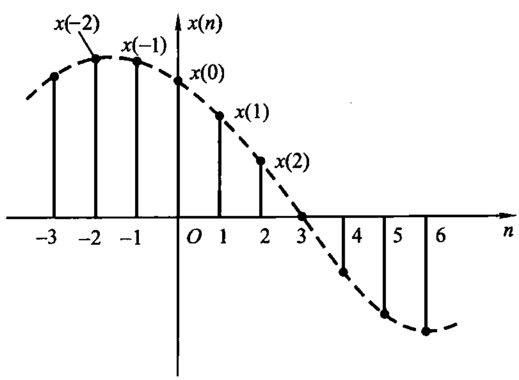


图 7－1 离散时间信号的图形

与连续时间系统的研究类似，在离散系统分析中，经常遇到离散时间信号的运算，包括两信号的相加、相乘以及序列自身的移位、反褶、尺度倍乘以及差分、累加等。

序列 $x(n)$ 与 $y(n)$ 相加是指两序列同序号的数值逐项对应相加构成一个新

序列$z(n)$

$$z(n)=x(n)+y(n) \tag{7-1}$$

类似地，二者相乘表示同序号样值逐项对应相乘构成一个新的序列 $z(n)$

$$z(n)=x(n)y(n) \tag{7-2}$$

序列延时$x(n-m)$是指原序列$x(n)$逐项依次右移(后移)m 位后给出一个新序列

$$z(n)=x(n-m) \tag{7-3}$$

若向左移位(向前移位)，其表达式为

$$z(n)=x(n+m) \tag{7-4}$$

序列的反褶表示将自变量 n 更换为 $-n$，表达式为

$$z(n)=x(-n) \tag{7-5}$$

序列的尺度倍乘将波形压缩或扩展，若将自变量 n 乘以正整数a，构成$x(an)$为压缩，而 $x\left(\frac{n}{a}\right)$则为波形扩展。必须注意，这时要按规律去除某些点或补足相应的零值。因此，也称这种运算为序列的“重排”。

例 7-1 若$x(n)$波形如图7-2(a)所示，求$x(2n)$和 $x\left(\frac{n}{2}\right)$的波形。

解

$x(2n)$波形如图 7-2(b)所示，这时，对应$x(n)$波形中 n 为奇数的各样值已不存在，只留下 n 为偶数的各样值，波形压缩。而 $x\left(\frac{n}{2}\right)$波形如图 7-2(c)所示，图中，对于 $x\left(\frac{n}{2}\right)$的 n 为奇数值各点应补入零值，n 为偶数值各点取得$x(n)$波形中依次对应的样值，因而波形扩展。

与连续时间信号的微分、积分运算相对应，离散时间信号分析过程中往往需要进行差分和累加运算。差分运算是指相邻两样值相减，其中，前向差分以符号$\Delta x(n)$表示

$$\Delta x(n)=x(n+1)-x(n) \tag{7-6}$$

而后向差分$\nabla x(n)$表达式为

$$\nabla x(n)=x(n)-x(n-1) \tag{7-7}$$

累加运算的结果表示为

$$z(n)=\sum_{K=-\infty}^{n} x(K) \tag{7-8}$$

注意对于给定的信号$x(K)$，当指定 n 值后$z(n)$为确定的数值。当然，这里已假定式中无限项取和是收敛的。

此外，有时需要论及序列的能量，序列$x(n)$的能量定义为

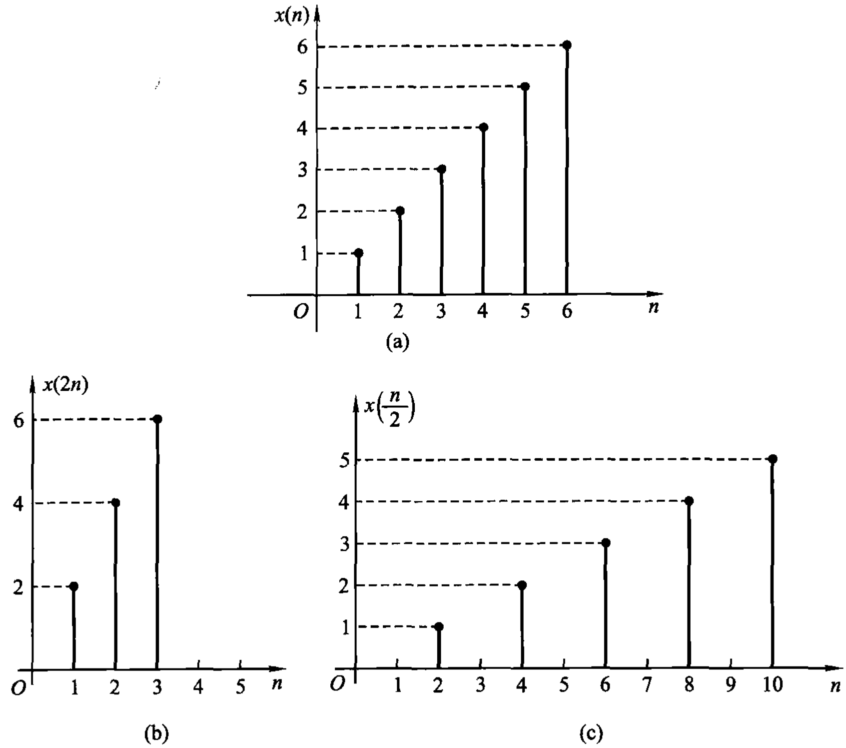


图 7-2 例 7-1 的波形

$$E=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|^2 \tag{7-9}$$

下面介绍一些常用的典型序列：

(1) 单位样值信号(unit sample 或 unit impulse)

$$\delta(n)=\begin{cases}1 & (n=0)\\ 0 & (n\neq 0)\end{cases} \tag{7-10}$$

此序列只在 $n=0$ 处取单位值 1，其余样点上都为零，如图 7-3 所示。也称为“单位取样”、“单位函数”、“单位脉冲”或“单位冲激”①。它在离散时间系统中的作用，类似于连续时间系统中的单位冲激函数 $\delta(t)$。但是，应注意它们之间的重要区别，$\delta(t)$ 可理解为在 $t=0$ 点脉宽趋于零，幅度为无限大的信号，或由分配函数定义；而 $\delta(n)$ 在 $n=0$ 点取有限值，其值等于 1。

① 为便于读者查阅参考书，把可能遇到的几种名称都已列上。

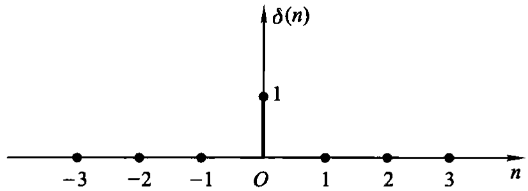


图 7－3　单位样值信号

(2) 单位阶跃序列

$$u(n)=\begin{cases}1 & (n\geqslant 0)\\ 0 & (n<0)\end{cases} \tag{7-11}$$

它的图形如图 7－4 所示。类似于连续时间系统中的单位阶跃信号$u(t)$。但应注意$u(t)$在 $t=0$ 点发生跳变,往往不予定义$\left(或定义为\frac{1}{2}\right)$,而$u(n)$在 $n=0$ 点明确规定为

$$u(0)=1$$

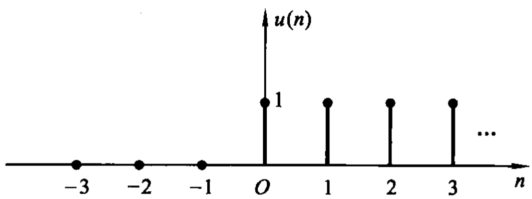


图 7－4　单位阶跃序列

(3) 矩形序列

$$R_N(n)=\begin{cases}1 & (0\leqslant n\leqslant N-1)\\ 0 & (n<0, n\geqslant N)\end{cases} \tag{7-12}$$

它从 $n=0$ 开始,到 $n=N-1$,共有 N 个幅度为 1 的数值,其余各点皆为零(见图 7－5)。类似于连续时间系统中的矩形脉冲。显然,矩形序列取值为 1 的范围也可从 $n=m$ 到$n=m+N-1$。这种序列可写作$R_N(n-m)$。

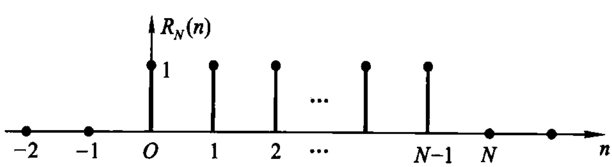


图 7－5　矩形序列

以上三种序列之间有如下关系

$$u(n)=\sum_{K=0}^{\infty}\delta(n-K) \tag{7-13}$$

$$\delta(n)=u(n)-u(n-1) \tag{7-14}$$

$$R_N(n)=u(n)-u(n-N) \tag{7-15}$$

(4) 斜变序列

$$x(n)=nu(n) \tag{7-16}$$

见图 7-6。它与连续时间系统中的斜变函数 $f(t)=t$ 相像。类似地，还可以给出 $n^2u(n), n^3u(n), \cdots, n^ku(n)$ 等序列。

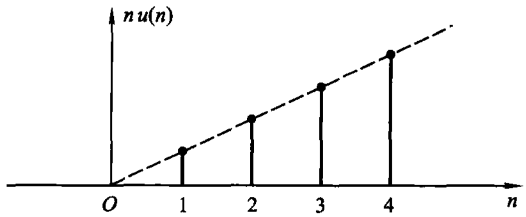


图 7-6 $nu(n)$序列

(5) 指数序列

$$x(n)=a^nu(n) \tag{7-17}$$

当 $|a|>1$ 时序列是发散的，$|a|<1$ 时序列收敛，$a>0$ 序列都取正值，$a<0$ 序列在正、负摆动。分别如图 7-7(a)～(d)所示。此外，还可能遇到 $a^{-n}u(n)$ 序列，其图形请读者练习画出。

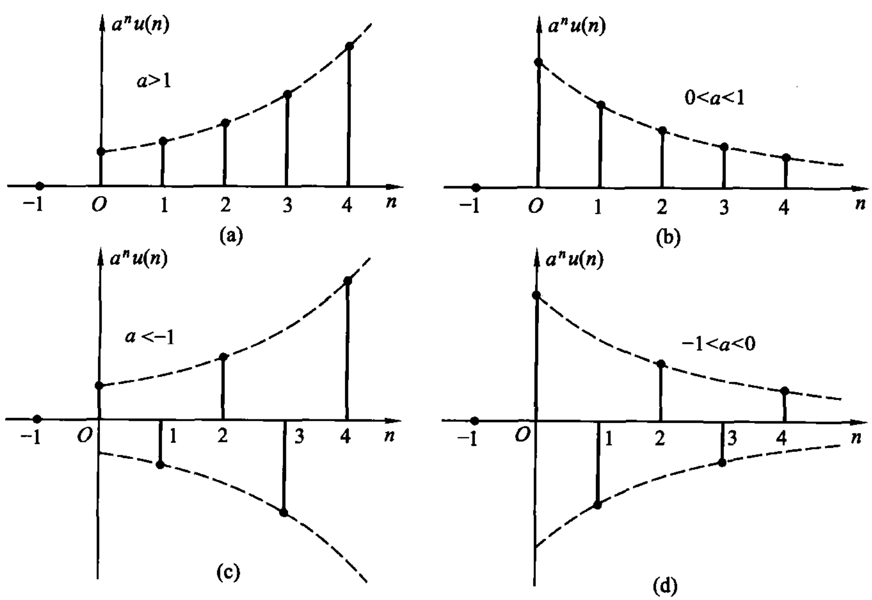


图 7-7 指数序列

（6）正弦序列

$$x(n)=\sin(n\omega_0) \tag{7-18}$$

式中 ω_0 是正弦序列的频率，它反映序列值依次周期性重复的速率。例如 $\omega_0=\frac{2\pi}{10}$，则序列值每 10 个重复一次正弦包络的数值。若 $\omega_0=\frac{2\pi}{100}$，则序列值每 100 个循环一次。图 7-8 示出 $\omega_0=0.1\pi$ 的情形，每经 20 个序列其值循环。显然，若 $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 为整数时，正弦序列才具有周期 $\frac{2\pi}{\omega_0}$，若 $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 不是整数，而为有理数，则正弦序列还是周期性，但其周期要大于 $\frac{2\pi}{\omega_0}$，若 $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 不是有理数，则正弦序列就不是周期性的。无论正弦序列是否呈周期性，都称 ω_0 为它的频率。

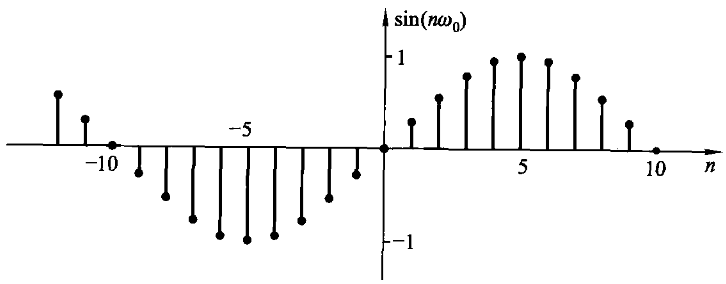


图 7-8　正弦序列 $\sin(n\omega_0)(\omega_0=0.1\pi)$

对于连续信号中的正弦波抽样，可得正弦序列。例如，若连续信号为

$$f(t)=\sin(\Omega_0 t)$$

它的抽样值写作

$$x(n)=f(nT)=\sin(n\Omega_0 T)$$

因此有

$$\omega_0=\Omega_0 T=\frac{\Omega_0}{f_s}$$

式中 T 是抽样间隔时间，f_s 是抽样频率$\left(f_s=\frac{1}{T}\right)$。为区分 ω_0 与 Ω_0，称 ω_0 为离散域的频率（正弦序列频率），而 Ω_0 为连续域的正弦频率。可以认为 ω_0 是 Ω_0 对于 f_s 取归一化之值 $\frac{\Omega_0}{f_s}$。

与正弦序列相对应，还有余弦序列

$$x(n)=\cos(n\omega_0) \tag{7-19}$$

（7）复指数序列

序列也可取复数值，称为复序列，它的每个序列值都可以是复数，具有实部与虚部。

复指数序列是最常见的复序列

$$x(n) = e^{j\omega_0 n} = \cos(\omega_0 n) + j\sin(\omega_0 n) \tag{7-20}$$

复序列也可用极坐标表示

$$x(n) = |x(n)| e^{j\arg[x(n)]} \tag{7-21}$$

对于上述复指数序列

$$|x(n)| = 1$$

$$\arg[x(n)] = \omega_0 n$$

最后简要讨论离散时间信号的分解。一种常用的分解方法是将任意序列表示为加权、延迟的单位样值信号之和

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m) \tag{7-22}$$

很明显,这是由于

$$\delta(n-m) = \begin{cases} 1 & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$$

$$x(m)\delta(n-m) = \begin{cases} x(n) & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$$

因此,式(7-22)成立。在7.6节将运用这一概念引入“卷积和”。

7.3　离散时间系统的数学模型

一个离散时间系统,其激励信号$x(n)$是一个序列,响应$y(n)$为另一序列,示意如图7-9所示。显然,此系统的功能是完成$x(n)$转变为$y(n)$的运算。

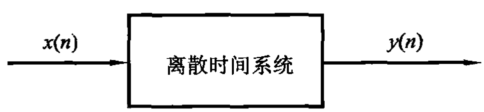


图7-9　离散时间系统

按离散时间系统的性能,可以划分为线性、非线性、时不变、时变等各种类型。目前,最常用的是“线性、时不变系统”。本书的讨论范围也限于此。

在绪论1.7节曾给出线性时不变系统的基本特性。这里,针对离散时间系统的特点再作一些说明。

线性离散时间系统应满足均匀性与叠加性。均匀性与叠加性的意义是:对于给定之系统,若$x_1(n)$,$y_1(n)$和$x_2(n)$,$y_2(n)$分别代表两对激励与响应,则当激励序列是$c_1x_1(n)+c_2x_2(n)$时(c_1,c_2分别为常数),系统的响应为$c_1y_1(n)+c_2y_2(n)$。此特性示意于图7-10。

对于时不变系统(或称移不变系统),在同样起始状态之下系统响应与激励施加于系统的时刻无关。若激励$x(n)$产生响应$y(n)$,则激励$x(n-N)$产生响

应$y(n-N)$。此特性示于图 7-11,它表明,若激励位移 N,响应也延迟 N。

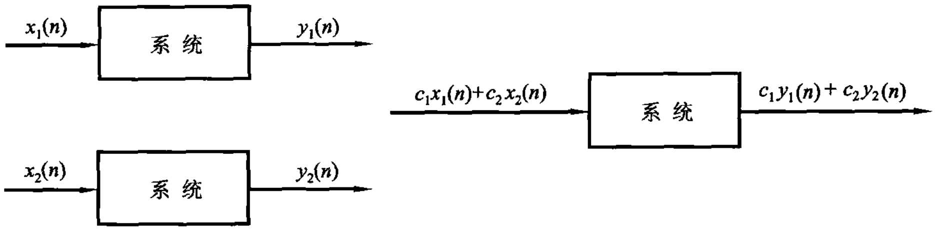


图 7-10 线性系统的均匀性与叠加性

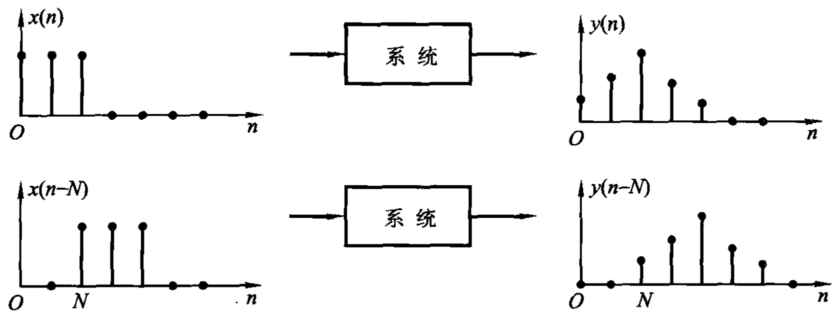


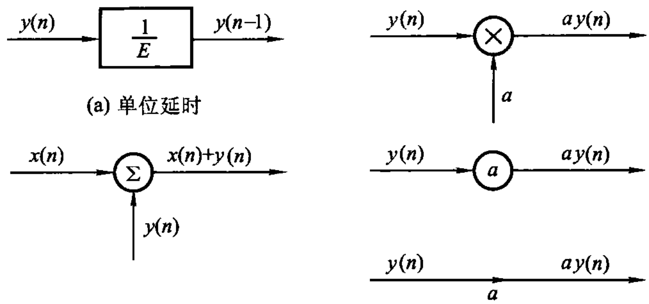
图 7-11 时不变系统特性

在连续时间系统中,信号是时间变量的连续函数,系统可用微分、积分方程式来描述。对于离散时间系统,信号的变量 n 是离散的整型值,因此,系统的行为和性能需用差分方程式来表示。

微分积分方程由连续自变量的函数 $f(t)$ 及其各阶导数 $\frac{d}{dt}f(t)$, $\frac{d^2}{dt^2}f(t)$,…或积分等项线性叠加组成。在差分方程中,构成方程式的各项包含有离散变量的函数 $x(n)$,以及此序列之序数增加或减少的移位函数 $x(n+1)$, $x(n+2)$,…,$x(n-1)$, $x(n-2)$,…。

在连续时间系统中,系统内部的数学运算关系可归结为微分(或积分)、乘系数、相加。与此对应,在离散时间系统中,基本运算关系是延时(移位)、乘系数、相加。在连续时间系统中,通常是利用 R, L, C 等基本电路元件组成网络,以完成所需的功能。但是对于离散时间系统,它的基本单元是延时(移位)元件、乘法器、相加器等。在时间域描述中,以符号$\frac{1}{E}$表示单位延时$\left(\frac{1}{E}\right.$的意义将在 7.4 节说明,也可用符号"T"或符号"D"表示单位延时$\left.\right)$。以符号$\textcircled{\scriptsize\Sigma}$表示两序列相加。

以符号⊗表示序列与系数相乘，为使逻辑图形简化，也可以在信号传送线旁边（或在圆圈内）标注系数，以示与此系数相乘，这些规定如图 7－12 所示。下面以实例说明如何为一个离散时间系统建立描述该系统的数学模型——差分方程。



(a) 单位延时　(b) 相加　(c) 乘系数

图 7－12　离散时间系统的基本单元符号

例 7－2　一个离散时间系统由延时、相加、乘系数等基本部件组合而成，如图 7－13 所示，激励信号为 $x(n)$，响应序列为 $y(n)$，试写出描述系统工作的差分方程。

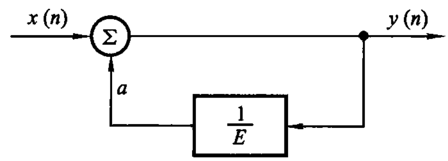


图 7－13　例 7－2 系统方框图

解

$y(n)$经单位延时得到$y(n-1)$。围绕图 7－13 中的相加器可以写出

$$y(n)=ay(n-1)+x(n)$$

经整理后得到

$$y(n)-ay(n-1)=x(n) \tag{7-23}$$

这就是一个常系数线性差分方程式（difference equation），或称递归关系式（recurrence relation）。一般情况下，等式左端由未知序列 $y(n)$ 及其移位序列 $y(n-1)$构成，等式右端是已知的激励函数$x(n)$，有时，还可以包括$x(n)$的延时函数，如$x(n-1)$。式中 a 是常数。由于此方程中的未知序列仅相差一个位移序数，因此是一阶差分方程。如果给定$x(n)$，而且知道$y(n)$的边界条件，解此差分方程即可求得响应序列$y(n)$。

如果方程式中还包括未知序列的移位项$y(n-2)$，$y(n-3)$，…，$y(n-N)$等，就可构成 N 阶差分方程式。差分方程式的阶数等于未知序列变量序号的最高与最低值之差。

这里举出的差分方程，各未知序列之序号自 n 以递减方式给出，称为后向形式的（或向右移序的）差分方程。也可从 n 以递增方式给出，即由 $y(n)$，

$y(n+1), y(n+2), \cdots, y(n+N)$等项组成，称为前向形式的（或向左移序的）差分方程。

例 7-3　一个离散时间系统如图 7-14 所示，写出描述系统工作的差分方程。

解

延时器的输入端应为序列 $y(n+1)$。于是，围绕相加器可以写出

$$y(n+1) = ay(n) + x(n) \tag{7-24}$$

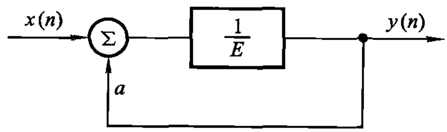


图 7-14　例 7-3 系统方框图

或

$$y(n) = \frac{1}{a}[y(n+1) - x(n)]$$

这是一个一阶前向差分方程式。

比较图 7-13 与图 7-14 可以看出，这两个系统并无本质差别，仅输出信号的取出端有所不同，图 7-13 的$y(n)$取自延时器的输入端，而图 7-14 的$y(n)$从延时器输出端得到，如果将同样的激励$x(n)$分别作用于两个系统，那么二者所得响应形式相同，但后者较前者延时一位。通常，对于因果系统用后向形式的差分方程比较方便，在一般的数字滤波器描述中多用这种形式。而在状态变量分析中，习惯上用前向形式的差分方程。

以上分析初步说明了离散时间系统数学模型的特点，为了进一步认识差分方程中各变量之间的约束关系，以图 7-13 的问题为例，说明此系统在激励信号$x(n)$作用下的工作过程，并试用迭代的方法找出差分方程的解答。

为了使序列 $x(n)$的数据流依次进入系统并完成运算，系统内部设置有三个寄存器，第一个存放 $x(n)$，第二个存放 $y(n)$，另一个存放系数 a。当 a 与 $y(n-1)$相乘之运算取得以后，存放 $x(n)$的寄存器给出 $x(n)$的一个样值，并与 $ay(n-1)$相加，相加得到的 $y(n)$值再存入 $y(n)$寄存器中，这样就完成了一次迭代，为下一个输入样值的进入做好了准备。

每一个新的输入样值进入之前（也即每一次迭代开始之前），系统的状态完全决定于$y(n)$寄存器中的数值。假定在 $n=0$ 时刻，输入$x(n)$的样值$x(0)$进入，那么，$y(n)$寄存器的起始值为$y(-1)$。

于是，可以求得 $y(0)$

$$y(0) = ay(-1) + x(0)$$

把$y(0)$作为下一次迭代的起始值依次给出

$$y(1) = ay(0) + x(1)$$
$$y(2) = ay(1) + x(2)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

由上述分析可知，可以用迭代的方法求解差分方程，例如对于例 7-2 的方

程式(7-23),若已知$x(n)=\delta(n)$,$y(-1)=0$,容易求得

$$y(0)=ay(-1)+1=1$$
$$y(1)=ay(0)+0=a$$
$$y(2)=ay(1)+0=a^2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y(n)=ay(n-1)+0=a^n$$

此范围限于$n\geqslant0$,因此,应将$y(n)$写作

$$y(n)=a^nu(n)$$

用迭代法求解差分方程是一种原始的方法,不易直接给出一个闭式解答,关于差分方程的一般求解方法将在下一节(用时域法)以及下一章(用变换域法)详细讨论。在那里还将看到,在某些情况下,迭代的方法还是一种可取的方法。

由以上分析容易看出,差分方程与微分方程在形式上有相似之处。我们熟知,一阶常系数线性微分方程的表达式可以写作

$$\frac{dy(t)}{dt}=Ay(t)+x(t) \tag{7-25}$$

为便于对比,将一阶前向差分方程式(7-24)抄录此处

$$y(n+1)=ay(n)+x(n)$$

比较这两个方程式可以看到,若$y(n)$与$y(t)$相当,则离散变量序号加1所得之序列$y(n+1)$就与连续函数对变量t取一阶导数$\frac{dy(t)}{dt}$相对应,$x(n)$与$x(t)$分别表示各自的激励信号。它们不仅在形式上相似,而且在一定条件下可以互相转化。对于连续时间函数$y(t)$,若在$t=nT$各点取得样值$y(nT)$,并假设时间间隔T足够小,于是$y(t)$微分式可以近似表示为

$$\frac{dy(t)}{dt}\approx\frac{y[(n+1)T]-y(nT)}{T}$$

因此,微分方程式(7-25)可以写作

$$\frac{y(n+1)-y(n)}{T}\approx Ay(n)+x(n)$$

经整理后得

$$y(n+1)\approx(1+AT)y(n)+Tx(n) \tag{7-26}$$

式(7-26)与式(7-24)具有相同的形式。必须注意,微分方程近似写作差分方程的条件是样值间隔T要足够小,T越小,近似程度越好。实际上,利用数字计算机来求解微分方程时(如欧拉法、龙格-库塔法),就是根据这一原理完成的。

下面举例说明,用差分方程近似处理微分方程的问题。

图7-15示出RC低通网络,描述此连续系统的数学模型为

$$RC\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+y(t)=x(t) \tag{7-27}$$

如果对激励信号$x(t)$抽样，得到$x(nT)$，简写作$x(n)$，若抽样间隔 T 足够小，则系统的数学模型可近似表示为

$$\frac{RC}{T}[y(n+1)-y(n)]+y(n)\approx x(n)$$

经整理后得到

$$y(n+1)\approx\left(1-\frac{T}{RC}\right)y(n)+\frac{T}{RC}x(n) \tag{7-28}$$

响应也是一个序列 $y(n)$。在图 7-15 中示出，若激励$x(t)$是阶跃信号，响应$y(t)$就是指数充电波形；若$x(t)$经抽样为阶跃序列，则响应序列$y(n)$端点的连线与 $y(t)$波形近似。在给定 T，RC 的条件下，求解差分方程式(7-28)即可证实这一直观的判断(学习 7.4 节以后，将在习题 7-26 解决这一问题)。

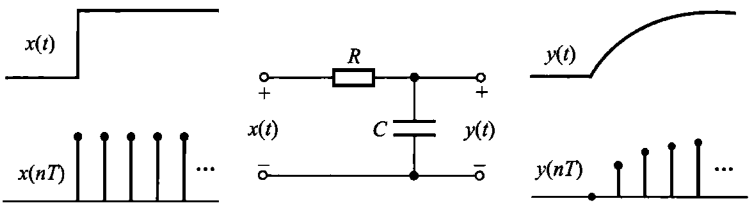


图 7-15　RC 低通网络

以上讨论的差分方程式，其离散变量都是时间，然而，差分方程是处理离散变量函数关系的一种数学工具，变量的选取因具体函数而异，并不限于时间。下面举例说明。

例 7-4　图 7-16 示出电阻梯形网络，其各支路电阻都为 R，每个结点对地的电压为 $v(n)$，$n=0,1,2,\cdots,N$。已知两边界结点电压为 $v(0)=E$，$v(N)=0$。试写出求第 n 个结点电压$v(n)$的差分方程式。

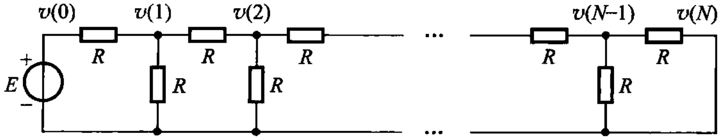


图 7-16　电阻梯形网络

解

对于任一结点 $n-1$，运用 KCL 不难写出

$$\frac{v(n-1)}{R}=\frac{v(n)-v(n-1)}{R}+\frac{v(n-2)-v(n-1)}{R}$$

经整理后得出

$$v(n)-3v(n-1)+v(n-2)=0$$

这是一个二阶后向差分方程,借助两个边界条件,经求解即可得到$v(n)$。

显然,本例中函数$v(n)$的自变量 n 不表示时间,而是代表电路图中结点顺序的编号,即序号(只能取整数)。

差分方程的应用遍及许多科学领域,不仅限于电工程问题之中,下面举出在生物科学的群体增长中运用差分方程的实例。

例 7-5 假定每对兔子每月可以生育一对小兔,新生的小兔子要隔一个月才具有生育能力,若第一个月只有一对新生小兔,求第 n 个月兔子对的数目是多少?

解

令 $y(n)$表示在第 n 个月兔子对的数目。已知 $y(0)=0,y(1)=1$,显然,可以推知:$y(2)=1,y(3)=2,y(4)=3,y(5)=5,\cdots$。

容易想到,在第 n 个月时,应有 $y(n-2)$对兔子具有生育能力,因而这批兔子要从 $y(n-2)$对变成 $2y(n-2)$对;此外,还有 $y(n-1)-y(n-2)$对兔子没有生育能力[它们是在第$(n-1)$月新生的],仍按原数目保留下来,于是可以写出

$$y(n)=2y(n-2)+[y(n-1)-y(n-2)]$$

经整理化简得到

$$y(n)-y(n-1)-y(n-2)=0$$

这是一个二阶差分方程式。

此方程还可写作如下形式

$$y(n)=y(n-1)+y(n-2) \tag{7-29}$$

很明显,此序列中,第 n 个样值$y(n)$等于前两个样值 $y(n-1)$与 $y(n-2)$之和,这就是著名的费班纳西(Fibonacci)数列。当给定不同的初始值时,可以得到不同数列。例如,若 $y(0)=0,y(1)=1$,则数列 $y(n)$可写作

$$\{0,1,1,2,3,5,8,13,\cdots\}$$

与微分方程的分类相对应,差分方程也可划分为线性的与非线性的,常系数的与参变系数的。一般情况下,线性、时不变离散时间系统需要由常系数线性差分方程描述。下一节研究常系数线性差分方程的求解方法。

7.4 常系数线性差分方程的求解

常系数线性差分方程的一般形式可表示为

$$a_0y(n)+a_1y(n-1)+\cdots+a_{N-1}y(n-N+1)+$$

$$a_N y(n-N) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \cdots + b_{M-1} x(n-M+1) + b_M x(n-M) \tag{7-30}$$

式中 a 和 b 是常数，已知函数 $x(n)$ 的位移阶次是 M，未知函数 $y(n)$ 的位移阶次即表示此差分方程的阶次 N。利用取和符号可将式(7-30)缩写为

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r) \tag{7-31}$$

求解常系数线性差分方程的方法一般有以下几种。

(1) 迭代法

包括手算逐次代入求解或利用计算机求解。这种方法概念清楚，也比较简便，但只能得到其数值解，不能直接给出一个完整的解析式作为解答（也称闭式解答）。在前节中已对图 7-13 的问题给出了利用迭代法求解的示例。

(2) 时域经典法

与微分方程的时域经典法类似，先分别求齐次解与特解，然后代入边界条件求待定系数。这种方法便于从物理概念说明各响应分量之间的关系，但求解过程比较麻烦，在解决具体问题时不宜采用。

(3) 分别求零输入响应与零状态响应

可以利用求齐次解的方法得到零输入响应，利用卷积和（简称卷积）的方法求零状态响应。与连续时间系统的情况类似，卷积方法在离散时间系统分析中同样占有十分重要的地位。

此外，在时域分析中也可辅以算子符号表示的方法。

(4) 变换域方法

类似于连续时间系统分析中的拉氏变换方法，利用 z 变换方法解差分方程有许多优点，这是实际应用中简便而有效的方法。

本章着重介绍时域中求齐次解的方法和卷积方法，下一章详细研究 z 变换方法。在第十二章还要讨论离散时间系统状态方程的求解。

一般差分方程对应的齐次方程的形式为

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = 0 \tag{7-32}$$

所谓差分方程的齐次解应满足式(7-32)。首先分析最简单的情况，若一阶齐次差分方程的表示式为

$$y(n) - \alpha y(n-1) = 0 \tag{7-33}$$

可以改写为

$$\alpha = \frac{y(n)}{y(n-1)}$$

这里，$y(n)$ 与 $y(n-1)$ 之比为 α，这意味着序列 $y(n)$ 是一个公比为 α 的几何级

数，有如下形式

$$y(n)=C\alpha^n$$

其中 C 是待定系数，由边界条件决定。

一般情况下，对于任意阶的差分方程，它们的齐次解以形式为 $C\alpha^n$ 的项组合而成。下面证实这一结论。

将 $y(n)=C\alpha^n$ 代入式(7-32)得到

$$\sum_{k=0}^{N}a_kC\alpha^{n-k}=0 \tag{7-34}$$

消去常数 C，并逐项除以 α^{n-N}，将式(7-34)简化为

$$a_0\alpha^N+a_1\alpha^{N-1}+\cdots+a_{N-1}\alpha+a_N=0 \tag{7-35}$$

如果 α_k 是式(7-35)的根，$y(n)=C\alpha_k^n$ 将满足式(7-32)。式(7-35)称为差分方程式(7-31)的特征方程，特征方程的根 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_N$ 称为差分方程的特征根。

在特征根没有重根的情况下，差分方程的齐次解为

$$C_1\alpha_1^n+C_2\alpha_2^n+\cdots+C_N\alpha_N^n \tag{7-36}$$

这里，$C_1,C_2,\cdots,C_N$ 是由边界条件决定的系数。现在举例说明求齐次解的过程。

例 7-6 上节例 7-5 对费班纳西数列建立的差分方程式为

$$y(n)-y(n-1)-y(n-2)=0$$

已知 $y(1)=1,y(2)=1$。试求解方程。

解

它的特征方程为

$$\alpha^2-\alpha-1=0$$

求得特征根为

$$\alpha_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\alpha_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

于是写出齐次解为

$$y(n)=C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

将 $y(1)=1$，$y(2)=1$ 分别代入，得到一组联立方程式

$$\begin{cases}1=C_1\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+C_2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\\[2ex]1=C_1\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2+C_2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\end{cases}$$

由此求得系数 C_1,C_2 分别为

$$C_1=\frac{1}{\sqrt{5}},C_2=\frac{-1}{\sqrt{5}}$$

最后，写出 $y(n)$的解答

$$y(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

在有重根的情况下，齐次解的形式将略有不同。假定 α_1 是特征方程的 K 重根，那么，在齐次解中，相应于 α_1 的部分将有 K 项

$$C_1n^{K-1}\alpha_1^n+C_2n^{K-2}\alpha_1^n+\cdots+C_{K-1}n\alpha_1^n+C_K\alpha_1^n \tag{7-37}$$

显然，$C_K\alpha_1^n$ 这项满足式(7－32)。为证明 $C_{K-1}n\alpha_1^n$ 也满足式(7－32)，将$y(n)=C_{K-1}n\alpha_1^n$ 代入式(7－32)左端得到

$$\begin{aligned}&a_0C_{K-1}n\alpha_1^n+a_1C_{K-1}(n-1)\alpha_1^{n-1}+\cdots+\\&a_{N-1}C_{K-1}(n-N+1)\alpha_1^{n-N+1}+a_NC_{K-1}(n-N)\alpha_1^{n-N}\end{aligned} \tag{7-38}$$

也就是

$$\begin{aligned}&C_{K-1}\alpha_1[a_0n\alpha_1^{n-1}+a_1(n-1)\alpha_1^{n-2}+\cdots+\\&a_{N-1}(n-N+1)\alpha_1^{n-N}+a_N(n-N)\alpha_1^{n-N-1}]\end{aligned} \tag{7-39}$$

我们的目的是要证明式(7－39)等于零。因为已经知道 α_1 是式(7－35)的 K 重根，当然，也就是下示方程的重根

$$\alpha^{n-N}(a_0\alpha^N+a_1\alpha^{N-1}+\cdots+a_{N-1}\alpha+a_N)=0$$

或

$$a_0\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+\cdots+a_{N-1}\alpha^{n-N+1}+a_N\alpha^{n-N}=0 \tag{7-40}$$

α_1 不仅满足式(7－40)，也满足它的导数式。因而有

$$\begin{aligned}&a_0n\alpha^{n-1}+a_1(n-1)\alpha^{n-2}+\cdots+\\&a_{N-1}(n-N+1)\alpha^{n-N}+a_N(n-N)\alpha^{n-N-1}=0\end{aligned} \tag{7-41}$$

至此可以看出，式(7－39)方括号内的式子应等于零，因而，$C_{K-1}n\alpha_1^n$ 的确满足式(7－32)。同理可证，其他各项 $C_1n^{K-1}\alpha_1^n, C_2n^{K-2}\alpha_1^n,\cdots$也满足式(7－32)。

例 7－7　求差分方程

$$y(n)+6y(n-1)+12y(n-2)+8y(n-3)=x(n)$$

的齐次解。

解　特征方程为

$$\alpha^3+6\alpha^2+12\alpha+8=0$$

即

$$(\alpha+2)^3=0$$

可见，－2 是此方程的三重特征根，于是求得齐次解为

$$(C_1n^2+C_2n+C_3)(-2)^n$$

当特征根为共轭复数时,齐次解的形式可以是等幅、增幅或衰减等形式的正弦(余弦)序列。

例 7-8 求下示差分方程的齐次解

$$y(n)-2y(n-1)+2y(n-2)-2y(n-3)+y(n-4)=0$$

已知边界条件$y(1)=1,y(2)=0,y(3)=1,y(5)=1$。

解

特征方程为

$$\alpha^4-2\alpha^3+2\alpha^2-2\alpha+1=0$$

$$(\alpha-1)^2(\alpha^2+1)=0$$

特征根

$$\alpha_1=\alpha_2=1 \qquad (\text{重根})$$

$$\alpha_3=\mathrm{j},\alpha_4=-\mathrm{j} \qquad (\text{共轭复根})$$

于是可以写出

$$\begin{aligned} y(n)&=(C_1n+C_2)(1)^n+C_3(\mathrm{j})^n+C_4(-\mathrm{j})^n \\ &=C_1n+C_2+C_3\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{n\pi}{2}}+C_4\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{n\pi}{2}} \\ &=C_1n+C_2+P\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)+Q\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

这里,C_1、C_2,P、Q 是待定系数,注意 $P=C_3+C_4$,$Q=\mathrm{j}(C_3-C_4)$。利用边界条件可以写出

$$1=y(1)=C_1+C_2+Q$$

$$0=y(2)=2C_1+C_2-P$$

$$1=y(3)=3C_1+C_2-Q$$

$$1=y(5)=5C_1+C_2+Q$$

由此方程组解得

$$C_1=0,C_2=1$$

$$P=1,Q=0$$

最后,得到差分方程的解

$$y(n)=1+\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

在微分方程的研究中已经知道,利用复平面图可以表明特征根的各种分布情况,并给出对应的时域特性。与此类似,对于差分方程也可用这种方法进行分析,在学习 z 变换方法之后,将利用 z 域的复平面图进行这种研究(见

第八章)。

下面讨论求特解的方法。为求得特解,首先将激励函数 $x(n)$代入方程式右端(也称自由项),观察自由项的函数形式来选择含有待定系数的特解函数式,将此特解函数代入方程后再求待定系数。现举出求解非齐次差分方程的例子。在此例中,包括求齐次解、求特解、最后得出完全响应

例 7-9 求下示差分方程的完全解

$$y(n)+2y(n-1)=x(n)-x(n-1)$$

其中激励函数 $x(n)=n^2$,且已知 $y(-1)=-1$。

解

(1) 首先,求得它的齐次解为 $C(-2)^n$

(2) 将激励信号 $x(n)=n^2$ 代入方程右端,得到自由项为 $n^2-(n-1)^2=2n-1$。根据此函数形式,选择具有 D_1n+D_2 形式的特解,其中 D_1,D_2 为待定系数,以此作 $y(n)$代入方程给出

$$D_1n+D_2+2[D_1(n-1)+D_2]=n^2-(n-1)^2$$

$$3D_1n+3D_2-2D_1=2n-1$$

比较方程两端系数得到

$$\begin{cases}3D_1=2\\3D_2-2D_1=-1\end{cases}$$

解得

$$D_1=\frac{2}{3},D_2=\frac{1}{9}$$

完全解的表示式为

$$y(n)=C(-2)^n+\frac{2}{3}n+\frac{1}{9}$$

(3) 代入边界条件 $y(-1)=-1$,求系数 C

$$-1=C(-2)^{-1}-\frac{2}{3}+\frac{1}{9}$$

解得

$$C=\frac{8}{9}$$

最后,写出完全响应的表示式为

$$y(n)=\frac{8}{9}(-2)^n+\frac{2}{3}n+\frac{1}{9}$$

一般情况下,若激励函数代入方程式右端出现 n^k 形式的函数,则特解选 $D_0n^k+D_1n^{k-1}+\cdots+D_k$;如果出现 a^n 形式的函数,且 a 不是此差分方程的特征根,则特解选 Da^n。实际上,前者与微分方程的 t^n 形式相对应,后者则与 e^t

形式对应。

在以上各例中曾利用给定的边界条件，如 $y(-1)$，$y(0)$或 $y(1)$来求得完全解中的系数 C。在一般情况下，对于 N 阶差分方程，应给定 N 个边界条件，例如取 $y(0),y(1),\cdots,y(N-1)$。利用这些条件，代入完全解的表示式，可以构成一组联立方程，求得 N 个系数 $C_1,C_2,\cdots,C_N$。考虑没有重根的情况，此时方程的全解为

$$C_1\alpha_1^n+C_2\alpha_2^n+\cdots+C_N\alpha_N^n+D(n) \tag{7-42}$$

式中 $D(n)$表示它的特解，其余各项之总和为齐次解。引用边界条件可建立如下方程组

$$\begin{aligned}
y(0)&=C_1+C_2+\cdots+C_N+D(0)\\
y(1)&=C_1\alpha_1+C_2\alpha_2+\cdots+C_N\alpha_N+D(1)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
y(N-1)&=C_1\alpha_1^{N-1}+C_2\alpha_2^{N-1}+\cdots+C_N\alpha_N^{N-1}+D(N-1)
\end{aligned}$$

将此方程组写作矩阵形式

$$\begin{bmatrix} y(0)-D(0)\\ y(1)-D(1)\\ \vdots\\ y(N-1)-D(N-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1\\ \alpha_1&\alpha_2&\cdots&\alpha_N\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ \alpha_1^{N-1}&\alpha_2^{N-1}&\cdots&\alpha_N^{N-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_1\\ C_2\\ \vdots\\ C_N\end{bmatrix} \tag{7-43}$$

简写作

$$\boldsymbol{Y}(k)-\boldsymbol{D}(k)=\boldsymbol{VC} \tag{7-44}$$

这里看到与连续时间系统微分方程对应的关系式，借助范德蒙德（Vandermonde）逆矩阵 $\boldsymbol{V}^{-1}$即可求得系数 $\boldsymbol{C}$ 的一般表示式为

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{V}^{-1}[\boldsymbol{Y}(k)-\boldsymbol{D}(k)] \tag{7-45}$$

与连续时间系统的情况相同，线性时不变离散时间系统的完全响应也可分解为自由响应分量与强迫响应分量，或零输入响应分量与零状态响应分量。

由式(7－42)可知，系统的完全响应(差分方程的完全解)可表示为自由响应分量与强迫响应分量(齐次解与特解)之和

$$\sum_{k=1}^{N}C_k\alpha_k^n+D(n)$$

其中 C_k 由式(7－45)以矩阵形式给出。

响应的边界条件 $y(k)$可分解为零输入响应的边界值 $y_{zi}(k)$与零状态之边界值 $y_{zs}(k)$两部分

$$y(k)=y_{zi}(k)+y_{zs}(k) \tag{7-46}$$

在零输入条件下有

$$\boldsymbol{D}(k)=0$$

于是得到相应的系数 $\boldsymbol{C}_{zi}$的矩阵表示

$$\boldsymbol{C}_{zi}=\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{Y}_{zi}(k) \tag{7-47}$$

而在零状态条件下,系数 $\boldsymbol{C}_{zs}$的矩阵表示式为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}_{zs}&=\boldsymbol{V}^{-1}[\boldsymbol{Y}_{zs}(k)-\boldsymbol{D}(k)]\\&=\boldsymbol{V}^{-1}[\boldsymbol{Y}(k)-\boldsymbol{Y}_{zi}(k)-\boldsymbol{D}(k)]\end{aligned} \tag{7-48}$$

系数 $\boldsymbol{C}$ 与 $\boldsymbol{C}_{zi}$、$\boldsymbol{C}_{zs}$之间满足

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}_{zi}+\boldsymbol{C}_{zs} \tag{7-49}$$

于是,完全响应由以下两部分组成

$$\text{零输入响应}=\sum_{k=1}^{N}C_{zik}\alpha_k^n \tag{7-50}$$

$$\text{零状态响应}=\sum_{k=1}^{N}C_{zsk}\alpha_k^n+D(n) \tag{7-51}$$

如果把完全响应按自由响应与强迫响应去划分,则有

$$\text{自由响应}=\sum_{k=1}^{N}C_k\alpha_k^n \tag{7-52}$$

$$\text{强迫响应}=D(n) \tag{7-53}$$

为便于比较,以上分析可写成如下表示式

$$\begin{aligned}y(n)&=\underbrace{\sum_{k=1}^{N}C_k\alpha_k^n}_{\text{自由响应}}+\underbrace{D(n)}_{\text{强迫响应}}\\&=\underbrace{\sum_{k=1}^{N}C_{zik}\alpha_k^n}_{\text{零输入响应}}+\underbrace{\sum_{k=1}^{N}C_{zsk}\alpha_k^n+D(n)}_{\text{零状态响应}}\end{aligned} \tag{7-54}$$

其中

$$\sum_{k=1}^{N}C_k\alpha_k^n=\sum_{k=1}^{N}(C_{zik}+C_{zsk})\alpha_k^n$$

以上所得结果与连续时间系统微分方程各响应分量的求解规律十分相似,读者可与第二章 2.5 节的有关公式作比较。

还需指出,差分方程的边界条件不一定由 $y(0),y(1),y(2),\cdots,y(N-1)$ 这一组数字给出。对于因果系统,常给定 $y(-1),y(-2),\cdots,y(-N)$为边界条件。若激励信号在 $n=0$ 时接入系统,所谓零状态是指 $y(-1),y(-2),\cdots,y(-N)$都等于零(N 阶系统),而不是指 $y(0),y(1),\cdots,y(N)$为零。如果已知 $y(-1),y(-2),\cdots,y(-N)$,欲求 $y(0),y(1),\cdots,y(N)$,可利用迭代法逐次导出。

例 7-10 已知系统的差分方程表达式为

$$y(n)-0.9y(n-1)=0.05u(n)$$

(1) 若边界条件 $y(-1)=0$,求系统的完全响应;

(2) 若边界条件 $y(-1)=1$,求系统的完全响应。

解

(1) 由于激励在 $n=0$ 接入,且给定 $y(-1)=0$,因此,起始时系统处于零状态。由 $y(-1)$利用迭代法可求出 $y(0)=0.05$。

由特征方程求得齐次解为 $C(0.9)^n$,而特解是 D,完全解的形式应为

$$y(n)=C(0.9)^n+D$$

为确定系数 D,将特解代入方程得到

$$D(1-0.9)=0.05$$
$$D=0.5$$

再将 $y(0)$代入 $y(n)$表示式求系数 C

$$0.05=y(0)=C+D$$
$$C=0.05-0.5=-0.45$$

最后,写出完全响应为

$$y(n)=\underbrace{-0.45\times(0.9)^n u(n)}_{\text{自由响应}}+\underbrace{0.5u(n)}_{\text{强迫响应}}$$
$$=[-0.45\times(0.9)^n+0.5]u(n)$$

波形如图 7-17 所示。

(2) 先求零状态响应,令 $y(-1)=0$,此即第(1)问之结果,可以写出

$$\text{零状态响应}=0.5-0.45\times(0.9)^n$$

再求零输入响应,令激励信号等于零,差分方程表示式为

$$y(n)-0.9y(n-1)=0$$

容易写出

$$\text{零输入响应}=C_{zi}\times(0.9)^n$$

以 $y(-1)=1$ 代入求得系数

$$C_{zi}=0.9$$

于是有

$$\text{零输入响应}=0.9\times(0.9)^n$$

将以上两部分结果叠加,得到完全响应$y(n)$表示式

$$y(n)=\underbrace{0.5-0.45\times(0.9)^n}_{\text{零状态响应}}+\underbrace{0.9\times(0.9)^n}_{\text{零输入响应}}$$

$$=\underbrace{0.45\times(0.9)^n}_{\text{自由响应}}+\underbrace{0.5}_{\text{强迫响应}}$$

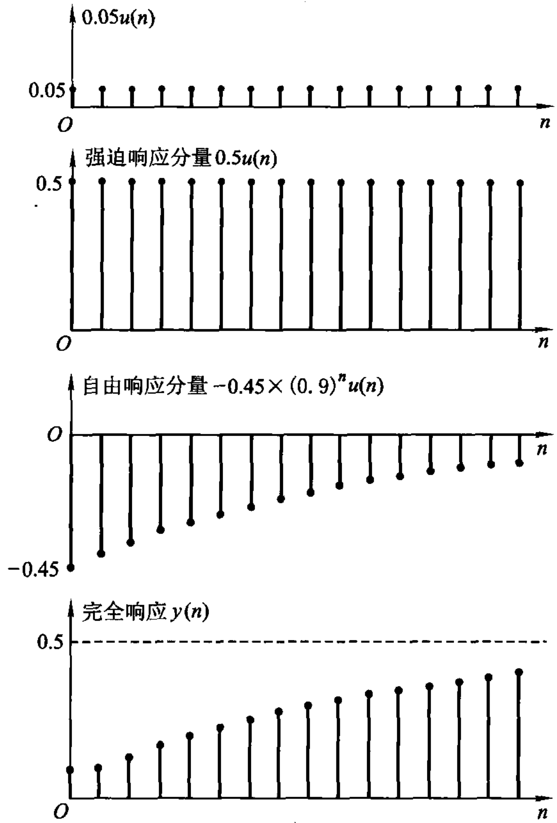


图 7－17 例 7－10(1)的响应波形

最后，将 $y(n)$ 的图形绘于图7－18。

如果将上例与连续时间系统的有关问题相比较，不难发现，图7－17的结果类似于一个起始无储能的一阶低通网络之阶跃响应，例如一阶 RC 电路中的电容从零值按指数规律充电。而图7－18则是起始有储能的这种一阶电路，好像电容具有某一较高的起始电压值，在较低幅度的阶跃信号作用下，它将从起始值按

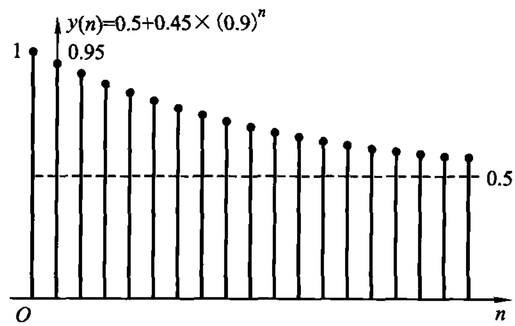


图 7－18 例 7－10(2)的响应波形

指数规律放电至稳态值。

前文已述,差分方程不仅应用于信息、电子学科,在许多科学与技术领域中都得到广泛应用,如例 7-5 介绍了应用于生物学科的例子,下面再给出对于银行信贷业务的应用实例。

例 7-11 中国建设银行与北京市住房资金管理中心共同发布的等额均还个人购房贷款每月偿还金额计算公式为

$$R=P\cdot\frac{I(1+I)^N}{(1+I)^N-1} \tag{7-55}$$

式中 P 为总贷款金额,I 为贷款月利率,还款期限是 N 个月,每月还款金额为 R。所谓等额均还即贷款期限内每月以相等的偿还额 R 归还部分本金与利息,N 个月还清全部本息。请按照上述规定建立差分方程式,并导出式(7-55)。

解

(1) 设第 n 个月末欠款为 $y(n)$,可建立如下差分方程

$$y(n)=y(n-1)-R+Iy(n-1),n\geqslant 1$$

即

$$y(n)-(1+I)y(n-1)=-R,n\geqslant 1 \tag{7-56}$$

而第 0 个月欠款为

$$y(0)=P$$

(2) $y(n)$的齐次解为 $C(1+I)^n$,式中 C 为待定系数。$y(n)$的特解为 D。将特解代回式(7-56)可求出 D 的表达式

$$D=(1+I)D-R$$

$$D=\frac{1}{I}R$$

(3) $y(n)$的完全解可写作

$$y(n)=C(1+I)^n+\frac{1}{I}R,n\geqslant 1 \tag{7-57}$$

令 $n=1$,求得

$$y(1)=C(1+I)+\frac{1}{I}R$$

另外,借助 $y(0)=P$ 经迭代求出

$$y(1)=(1+I)P-R$$

以上二式相等解出

$$C(1+I)+\frac{1}{I}R=(1+I)P-R$$

$$C=P-\frac{1}{I}R$$

(4) 将系数 C 代回式(7-57)得到

$$y(n)=\left(P-\frac{1}{I}R\right)(1+I)^n+\frac{1}{I}R,\ n\geqslant 0$$

为满足 N 个月全部还清本息应有

$$y(N)=0$$

即

$$\left(P-\frac{1}{I}R\right)(1+I)^N+\frac{1}{I}R=0$$

至此，可证得式(7-55)

$$R=P\cdot\frac{I(1+I)^N}{(1+I)^N-1}$$

例如，若贷款总金额 P 为 10 万元，贷款期限 10 年($N=120$)，年利率为 5.13% $\left(I=\frac{1}{12}\times 5.13\%\right)$，可求得每月还款金额 R 为 1 067.02 元。

对于线性时不变系统，可以借助算子符号、传输算子等概念来表示或求解系统的数学模型。在连续时间系统中，以算子 p 表示微分运算。对于离散时间系统，用算子符号“E”表示将序列超前一个单位时间的运算。E 也称为移序算子，利用移序算子可写出

$$y(n+1)=Ey(n) \tag{7-58}$$

$$y(n-1)=\frac{1}{E}y(n) \tag{7-59}$$

对于差分方程

$$y(n+1)-ay(n)=x(n)$$

可改写作

$$(E-a)y(n)=x(n) \tag{7-60}$$

而对于方程式

$$y(n)-ay(n-1)=x(n-1)$$

则可表示为

$$\left(1-\frac{a}{E}\right)y(n)=\frac{1}{E}x(n) \tag{7-61}$$

对于以上二例，可以引入传输算子 $H(E)=\frac{1}{E-a}$，于是有

$$y(n)=\frac{1}{E-a}x(n) \tag{7-62}$$

再次提醒读者，这不是一个代数方程，而是一个运算方程。这些特性与连续系统中的情况类似。

由以上分析看出，算子 $\frac{1}{E}$ 表示延迟单位时间的作用，即 $y(n)$ 经 $\frac{1}{E}$ 运算给

出 $y(n-1)$,这正是在 7.3 节规定以 $\frac{1}{E}$ 作延时元件符号标志的理由。

算子符号法是由时域分析转向变换域分析的一种过渡形式,仅简要介绍至此。在第八章将详细研究用 z 变换解差分方程的方法。

7.5 离散时间系统的单位样值(单位冲激)响应

在连续线性系统中,我们注意研究单位冲激 $\delta(t)$作用于系统引起的响应 $h(t)$,对于离散线性系统,我们来考察单位样值$\delta(n)$作为激励而产生的系统零状态响应$h(n)$——单位样值响应。这不仅是由于这种激励信号具有典型性,而且也是为求卷积和做准备。

由于$\delta(n)$信号只在 $n=0$ 时取值$\delta(0)=1$,在 n 为其他值时都为零,因而,利用这一特点可以较方便地以迭代法依次求出$h(0),h(1),\cdots,h(n)$。

例 7-12 已知离散时间系统的差分方程表达式

$$y(n)-\frac{1}{2}y(n-1)=x(n)$$

试求其单位样值响应 $h(n)$。

解

对于因果系统,由于 $x(-1)=\delta(-1)=0$,故 $y(-1)=h(-1)=0$,以此起始条件代入差分方程可得

$$h(0)=\frac{1}{2}h(-1)+\delta(0)=0+1=1$$

依次代入求得

$$h(1)=\frac{1}{2}h(0)+\delta(1)=\frac{1}{2}+0=\frac{1}{2}$$

$$h(2)=\frac{1}{2}h(1)+\delta(2)=\frac{1}{4}+0=\frac{1}{4}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$h(n)=\frac{1}{2}h(n-1)+\delta(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

此系统的单位样值响应是

$$h(n)=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^n & n\geqslant 0\\ 0 & n<0\end{cases}$$

用这种迭代方法求系统的单位样值响应还不能直接得到 $h(n)$的闭式。为了能够给出闭式解答,可把单位样值 $\delta(n)$激励信号等效为起始条件,这样就把问题转化为求解齐次方程,由此得到 $h(n)$的闭式。下面的例子说明这种方法。

例 7-13 系统差分方程式为

$$y(n)-3y(n-1)+3y(n-2)-y(n-3)=x(n)$$

求系统的单位样值响应。

解

(1) 求差分方程的齐次解(即系统的零输入响应)。写出特征方程

$$\alpha^3-3\alpha^2+3\alpha-1=0$$

解得特征根 $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=1$,即 1 为三重根。于是可知,齐次解的表示式为

$$C_1n^2+C_2n+C_3$$

(2) 因为起始时系统是静止的,容易推知 $h(-2)=h(-1)=0, h(0)=\delta(0)=1$。以$h(0)=1,h(-1)=0,h(-2)=0$作为边界条件建立一组方程式求系数 C

$$\begin{cases}1=C_3\\0=C_1-C_2+C_3\\0=4C_1-2C_2+C_3\end{cases}$$

解得:

$$C_1=\frac{1}{2},C_2=\frac{3}{2},C_3=1$$

(3) 最后写出,系统的单位样值响应为

$$h(n)=\begin{cases}\frac{1}{2}(n^2+3n+2) & n\geqslant0\\0 & n<0\end{cases}$$

此例中单位样值的激励作用等效为一个起始条件 $h(0)=1$,因而,求单位样值响应的问题转化为求系统的零输入响应,很方便地得到 $h(n)$的闭式。

例 7-14 已知系统的差分方程模型

$$y(n)-5y(n-1)+6y(n-2)=x(n)-3x(n-2)$$

求系统的单位样值响应。

解

(1) 求得齐次解为

$$C_13^n+C_22^n$$

(2) 假定差分方程式右端只有 $x(n)$项作用,不考虑 $3x(n-2)$项作用,求此时系统的单位样值响应 $h_1(n)$。

边界条件是 $h_1(0)=1,h_1(-1)=0$,由此建立求系数 C 的方程组

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 \\ 0 = \dfrac{1}{3}C_1 + \dfrac{1}{2}C_2 \end{cases}$$

解得

$$C_1 = 3, C_2 = -2$$

于是写出

$$h_1(n) = \begin{cases} 3^{n+1} - 2^{n+1} & (n \geqslant 0) \\ 0 & (n < 0) \end{cases}$$

(3) 只考虑 $-3x(n-2)$ 项作用引起的响应 $h_2(n)$。由线性时不变特性可知

$$h_2(n) = -3h_1(n-2)$$
$$= \begin{cases} -3(3^{n-1} - 2^{n-1}) & (n \geqslant 2) \\ 0 & (n < 2) \end{cases}$$

(4) 将以上结果叠加,并在表示式中利用单位阶跃序列符号 $u(n)$,写出系统的单位样值响应

$$\begin{aligned} h(n) &= h_1(n) + h_2(n) \\ &= (3^{n+1} - 2^{n+1})u(n) - 3(3^{n-1} - 2^{n-1})u(n-2) \\ &= (3^{n+1} - 2^{n+1})[\delta(n) + \delta(n-1) + u(n-2)] - \\ &\quad 3(3^{n-1} - 2^{n-1})u(n-2) \\ &= \delta(n) + 5\delta(n-1) + (3^{n+1} - 2^{n+1} - 3^n + 3 \times 2^{n-1})u(n-2) \\ &= \delta(n) + 5\delta(n-1) + (2 \times 3^n - 2^{n-1})u(n-2) \end{aligned}$$

在连续时间系统中曾利用系统函数求拉普拉斯逆变换的方法决定冲激响应 $h(t)$,与此类似,在离散时间系统中,也可利用系统函数求逆 z 变换来确定单位样值响应,一般情况下,这是一种较简便的方法,将在第八章详述。

由于单位样值响应 $h(n)$ 表征了系统自身的性能,因此,在时域分析中可以根据 $h(n)$ 来判断系统的某些重要特性,如因果性、稳定性,以此区分因果系统与非因果系统,稳定系统与非稳定系统。

所谓因果系统,就是输出变化不领先于输入变化的系统。响应 $y(n)$ 只取决于此时,以及此时以前之激励,即 $x(n), x(n-1), x(n-2), \cdots$。如果 $y(n)$ 不仅取决于当前及过去的输入,而且还取决于未来的输入 $x(n+1), x(n+2), \cdots$,那么,在时间上就违背了因果关系,因而是非因果系统,也即不可实现的系统。

离散线性时不变系统作为因果系统的充分必要条件是

$$h(n) = 0 \quad (\text{当 } n < 0) \tag{7-63}$$

或表示为

$$h(n)=h(n)u(n) \tag{7-64}$$

在离散时间系统的应用中,某些数据处理过程的自变量虽为时间,但是待处理的数据可以记录并保存起来。这时,不一定局限于用因果系统处理信号,可借助非因果系统。在语音处理、气象学、地球物理学、经济学、人口统计学等领域中会遇到这种情况。例如,对于股票市场,人们有时更加关注数据的变化趋势,然而在这个总的慢变化过程中包含着高频起伏。为了考察一段时期内的慢变化趋势,可以利用平滑系统滤除高频成分。一种非因果的平滑系统数学模型可表示为

$$y(n)=\frac{1}{2M+1}\sum_{k=-M}^{M}x(n-k) \tag{7-65}$$

对于待处理的数据 $x(n)$,可在 n 点附近取 $\pm M$ 点的数据作平均计算,即取和后再除以 $(2M+1)$,由此获得平滑后的数据 $y(n)$,见图 7-19。显然,这是一个非因果系统。此外,若自变量不是时间(例如对某些图像处理信号),也可能遇到非因果系统。

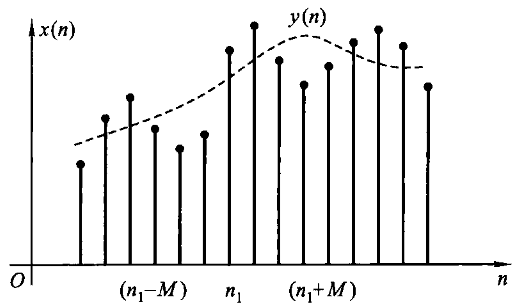


图 7-19 将 $x(n)$ 作平滑处理得到 $y(n)$

在连续时间系统分析中(4.11 节)已经知道,稳定系统的定义为:若输入是有界的,输出必定也是有界的系统。对于离散时间系统,稳定系统的充分必要条件是单位样值(单位冲激)响应绝对可积(或称绝对可和,在离散时间系统中指求和),即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|\leqslant M \tag{7-66}$$

式中 M 为有界正值。

既满足稳定条件又满足因果条件的系统是我们的主要研究对象,这种系统的单位样值响应 $h(n)$ 是单边的而且是有界的

$$\begin{cases}h(n)=h(n)u(n)\\ \sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|\leqslant M\end{cases} \tag{7-67}$$

下面考虑一个简单的例子,若系统的单位样值响应 $h(n)=a^n u(n)$,则容易判断它是因果系统,因为当 $n<0$ 时 $h(n)=0$。稳定性的确定要与 a 的数值有关,若 $|a|<1$,则几何级数 $\sum_{n=0}^{\infty}|a|^n$ 收敛为 $\frac{1}{1-a}$,系统是稳定的;若 $|a|>1$,则该几何级数发散,系统是非稳定的。

7.6 卷积(卷积和)

在连续时间系统中,可以利用卷积的方法求系统的零状态响应,这时,首先把激励信号分解为冲激函数序列,然后令每一冲激函数单独作用于系统求其冲激响应,最后把这些响应叠加即可得到系统对此激励信号的零状态响应。这个叠加的过程表现为求卷积积分。在离散时间系统中,可以采用大体相同的方法进行分析,由于离散信号本身就是一个不连续的序列,因此,激励信号分解为脉冲序列的工作就很容易完成,对应每个样值激励,系统得到对此样值的响应,每一响应也是一个离散时间序列,把这些序列叠加即得零状态响应。因为离散量的叠加无需进行积分,因此,叠加过程表现为求“卷积和”。

由式(7-22)可知,离散时间系统的任意激励信号 $x(n)$可以表示为单位样值加权取和的形式

$$x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m)$$

设系统对单位样值 $\delta(n)$的响应为 $h(n)$,由时不变特性可知,对于 $\delta(n-m)$的延时响应就是 $h(n-m)$;再由线性系统的均匀性可知,对于 $x(m)\delta(n-m)$序列的响应是$x(m)h(n-m)$,最后根据叠加性得到系统对于$\sum x(m)\delta(n-m)$序列总的响应为

$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m) \tag{7-68}$$

式(7-68)称为“卷积和”(或仍称为卷积)。它表征了系统响应 $y(n)$与激励 $x(n)$和单位样值响应 $h(n)$之间的关系,$y(n)$是 $x(n)$与 $h(n)$的卷积,用简化符号记为

$$y(n)=x(n)*h(n) \tag{7-69}$$

对式(7-68)进行变量置换得到卷积的另一种表示式

$$\begin{aligned}y(n)&=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(m)x(n-m)\\&=h(n)*x(n)\end{aligned} \tag{7-70}$$

这表明,两序列进行卷积的次序是无关紧要的,可以互换。容易证明,卷积和的代数运算与连续系统中卷积的代数运算(2.8 节)规律相似 ,都服从交换律、分配律、结合律。

在连续时间系统中,$\delta(t)$与 $f(t)$的卷积仍等于 $f(t)$,类似地,在离散时间系统中也有

$$\delta(n)*x(n)=x(n) \tag{7-71}$$

卷积和的图形解释可以把取卷积和的过程分解为反褶、平移、相乘、取和四个步骤,在下面的例子中可以看到。

例 7-15 某系统的单位样值响应是

$$h(n)=a^n u(n)$$

其中 $0<a<1$。若激励信号为

$$x(n)=u(n)-u(n-N)$$

试求响应 $y(n)$。

解 由式(7-68)可知

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} [u(m)-u(m-N)]a^{n-m}u(n-m) \end{aligned}$$

图 7-20 中示出了 $x(n)$、$h(n)$序列图形。为求卷积和,同时绘出 $x(m)$以及对应某几个 n 值的 $h(n-m)$。由图看出,在 $n<0$ 的条件下,$h(n-m)$与 $x(m)$相乘,处处都为零值,因此当 $n<0$ 时,$y(n)=0$。而 $0\leqslant n\leqslant N-1$ 时,从 $m=0$ 到 $m=n$ 的范围内 $h(n-m)$与 $x(m)$有交叠相乘而得的非零值,得到

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{m=0}^{n} a^{n-m} = a^n \sum_{m=0}^{n} a^{-m} \\ &= a^n \frac{1-a^{-(n+1)}}{1-a^{-1}} \quad (0\leqslant n\leqslant N-1) \end{aligned}$$

对于 $N-1\leqslant n$,交叠相乘的非零值从 $m=0$ 延伸到 $m=N-1$,因此

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{m=0}^{N-1} a^{n-m} = a^n \sum_{m=0}^{N-1} a^{-m} \\ &= a^n \frac{1-a^{-N}}{1-a^{-1}} \quad (N-1\leqslant n) \end{aligned}$$

图 7-21 绘出了响应 $y(n)$。

例 7-16 已知 $x_1(n)=2\delta(n)+\delta(n-1)+4\delta(n-2)+\delta(n-3)$,$x_2(n)=3\delta(n)+\delta(n-1)+5\delta(n-2)$,求卷积 $y(n)=x_1(n)*x_2(n)$。

解

注意到本例给出的离散时间信号未能以闭式表示,为书写方便也可将它们写作序列

$$\{x_1(n)\}=\{\underset{\uparrow}{2} \quad 1 \quad 4 \quad 1\}$$

$$\{x_2(n)\}=\{\underset{\uparrow}{3} \quad 1 \quad 5\}$$

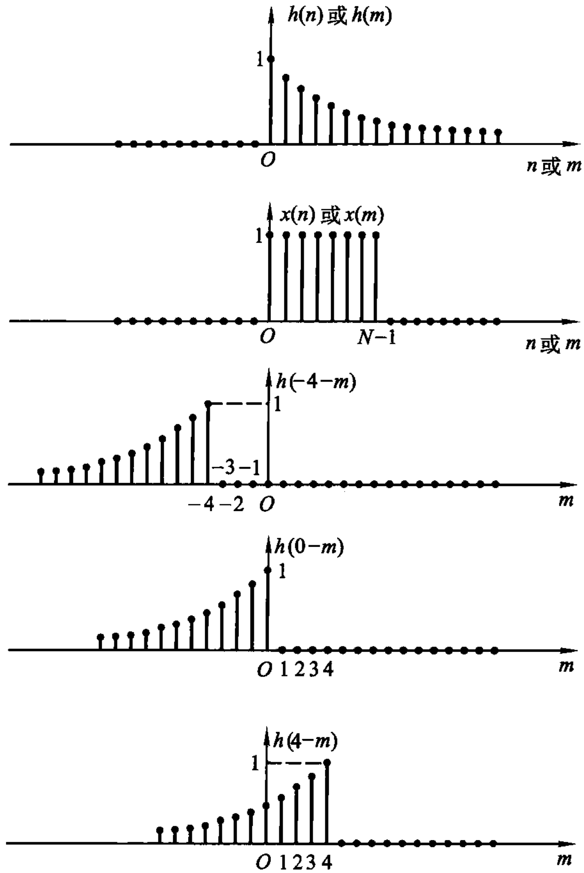


图 7-20 例 7-15 中计算卷积和有关的序列

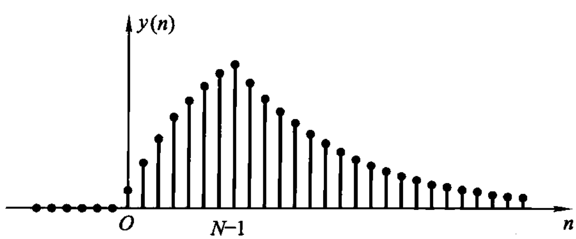


图 7-21 例 7-15 中求得的卷积和 $y(n)$

利用一种"对位相乘求和"的方法可以较快地求出卷积结果。为此,将两序列样值以各自 n 的最高值按右端对齐,如下排列

$x_1(n)$:			2	1	4	1
$x_2(n)$:				3	1	5
			10	5	20	5
		2	1	4	1	
	6	3	12	3		
$y(n)$:	6	5	23	12	21	5

然后把逐个样值对应相乘但不要进位，最后把同一列上的乘积值按对位求和即可得到 $y(n)$

$$\{y(n)\}=\{\underset{\uparrow}{6}\quad 5\quad 23\quad 12\quad 21\quad 5\}$$

不难发现，这种方法实质上是将作图过程的反褶与移位两步骤以对位排列方式巧妙地取代，读者可自行对此例用作图法求解，将两种方法进行对比。显然，这里的"对位相乘求和"解法比较便捷。

以上两例着重说明了求卷积和的原理。表 7－1 中列出常用因果序列的卷积和，以备查用。此外，在实际应用中借助离散傅里叶变换中的快速傅里叶变换算法，利用计算机可以较简便地求得两序列的卷积和。

表 7－1 卷 积 和

序号	$x_1(n)$	$x_2(n)$	$x_1(n)*x_2(n)=x_2(n)*x_1(n)$
1	$\delta(n)$	$x(n)$	$x(n)$
2	a^n	$u(n)$	$\dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}$
3	$u(n)$	$u(n)$	$n+1$
4	a_1^n	a_2^n	$\dfrac{a_1^{n+1}-a_2^{n+1}}{a_1-a_2}\quad(a_1\neq a_2)$
5	a^n	a^n	$(n+1)a^n$
6	a^n	n	$\dfrac{n}{1-a}+\dfrac{a(a^n-1)}{(1-a)^2}$
7	n	n	$\dfrac{1}{6}(n-1)n(n+1)$

续表

序号	$x_1(n)$	$x_2(n)$	$x_1(n)*x_2(n)=x_2(n)*x_1(n)$
8	$a_1^n\cos(\omega_0 n+\theta)$	a_2^n	$\dfrac{a_1^{n+1}\cos[\omega_0(n+1)+\theta-\varphi]-a_2^{n+1}\cos(\theta-\varphi)}{\sqrt{a_1^2+a_2^2-2a_1a_2\cos\omega_0}}$ $\varphi=\arctan\left(\dfrac{a_1\sin\omega_0}{a_1\cos\omega_0-a_2}\right)$

注：表中函数均为因果(有始)序列。当 $n<0$ 时

$$x_1(n)=0, x_2(n)=0, x_1(n)*x_2(n)=0$$

7.7 解卷积(反卷积)

解卷积(deconvolution)也称为反卷积、反演卷积或逆卷积。

计算卷积和的表达式为

$$y(n)=h(n)*x(n)$$

在前面的讨论中，都是给定 $h(n)$和 $x(n)$求解 $y(n)$，而在许多信号处理的实际问题中需要作逆运算，即由给定的 $h(n)$，$y(n)$求 $x(n)$或由 $x(n)$，$y(n)$求 $h(n)$。这两类问题都称为解卷积。在控制工程领域中，又将从 $x(n)$，$y(n)$求 $h(n)$类型的问题称为"系统辨识"，也即由给定的输入、输出信号寻找系统模型。

在连续时间系统分析中，难以将积分运算写出简明的逆运算表达式，而对于离散时间系统的分析，不难给出求卷积逆运算的一般表达式。

由卷积定义写出

$$y(n)=\sum_{m=0}^{n}x(m)h(n-m)$$

将此式改写为矩阵运算形式

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(0) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ h(1) & h(0) & 0 & \cdots & 0 \\ h(2) & h(1) & h(0) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ h(n) & h(n-1) & h(n-2) & \cdots & h(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ \vdots \\ x(n) \end{bmatrix} \tag{7-72}$$

借助此矩阵可逐次反求得 $x(n)$值：

$$x(0)=y(0)/h(0)$$

$$x(1)=[y(1)-x(0)h(1)]/h(0)$$

$$x(2)=[y(2)-x(0)h(2)-x(1)h(1)]/h(0)$$

…………

依此规律递推，可以求得 $x(n)$ 的表达式为

$$x(n)=[y(n)-\sum_{m=0}^{n-1}x(m)h(n-m)]/h(0) \tag{7-73}$$

此即给定 $y(n)$，$h(n)$ 求 $x(n)$ 的计算式，式中需用到 $n-1$ 位之前的全部 x 值。利用计算机编程容易完成此解卷积运算。

同理可求得给定 $x(n)$，$y(n)$ 求 $h(n)$ 的计算式

$$h(n)=[y(n)-\sum_{m=0}^{n-1}h(m)x(n-m)]/x(0) \tag{7-74}$$

在实际应用中，某些测量仪器近似具有线性系统特性，由它的系统函数 $h(n)$ 和测量输出信号 $y(n)$ 借助解卷积运算可求得待测信号即输入 $x(n)$，例如血压计传感器。对于地震信号处理、地质勘探或石油勘探等问题，往往是对待测目标发送信号 $x(n)$，测得反射回波 $y(n)$，由此计算被测地下层面的 $h(n)$ 以判断它的物理特性。图 7－22 示出雷达探测系统的简化框图，图中，$e(t)$ 和 $r(t)$ 分别为发送与接收信号，$h_T(t)$ 和 $h_R(t)$ 分别表示发、收天线的系统函数，若待测目标的系统函数为 $h(t)$，它们之间满足

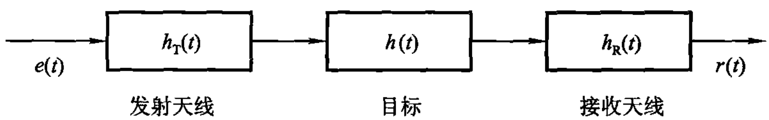


图 7－22　雷达探测系统简化框图

$$r(t)=e(t)*h_T(t)*h(t)*h_R(t) \tag{7-75}$$

显然，在给定 $e(t)$，$r(t)$，$h_T(t)$ 和 $h_R(t)$ 的条件下，求 $h(t)$ 也是一个解卷积问题，根据计算得到的 $h(t)$ 可表明目标的特征，以此方法识别不同类型的目标。当然，在进行上述解卷积运算时，需要将各时间信号离散化，如 $e(t)$，$r(t)$，$h(t)$ 分别改写为 $e(n)$，$r(n)$，$h(n)$。

例 7－17　利用解卷积运算研究多径失真的消除。

在 2.9 节曾讨论消除通信系统中多径失真的方法，在此利用离散时间信号与系统解卷积的概念进行分析。首先，要为这一问题建立离散时间信号与系统的数学模型。假定，回波系统的冲激响应为

$$h_1(n)=\delta(n)+a\delta(n-1)$$

为了由此式恢复 $\delta(n)$、去除 $a\delta(n-1)$ 项，需要引入逆系统，它的冲激响应为 $h_i(n)$，于是可建立以下约束

$$\delta(n)=h_1(n)*h_i(n)$$

很明显，这是一个解卷积问题。

解

对照式(7－74)，并参看图 2－15 可以写出此处 $y(n)=\delta(n)$，$x(n)=\delta(n)+a\delta(n-1)$，而 $h(n)$正是这里待求的 $h_{i}(n)$，由式(7－74)经逐次迭代求得

$$h(0)=y(0)/x(0)=1$$
$$h(1)=[y(1)-h(0)x(1)]/x(0)=-a$$
$$h(2)=[y(2)-h(0)x(2)-h(1)x(1)]/x(0)=a^2$$
$$h(3)=-a^3$$
$$h(4)=a^4$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$h(k)=(-a)^k$$

写作一般闭式为$(-a)^n$，也即

$$h(n)=\sum_{k=0}^{\infty}(-a)^k\delta(n-k)$$

此即待求逆系统冲激响应 $h_{i}(n)$的表达式。可以看出，此结果与式(2－90)一致。只是由连续时间函数改写为离散时间函数，前边的 $\delta(t)$与此处 $\delta(n)$对应，而 T 与 k 对应，当选择 $T=1$ 时，kT 即为 k。不过，前文只能采用直观的屡试法，而这里可以借助严格的迭代公式并利用计算机求出。这表明，离散时间信号与系统的分析方法在实际中可以得到更广泛的应用。

习　　题

7－1　分别绘出以下各序列的图形。

(1) $x(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$

(2) $x(n)=2^n u(n)$

(3) $x(n)=\left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n)$

(4) $x(n)=(-2)^n u(n)$

(5) $x(n)=2^{n-1}u(n-1)$

(6) $x(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u(n)$

7－2　分别绘出以下各序列的图形。

(1) $x(n)=nu(n)$

(2) $x(n)=-nu(-n)$

(3) $x(n)=2^{-n}u(n)$

(4) $x(n)=\left(-\frac{1}{2}\right)^{-n}u(n)$

(5) $x(n)=-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u(-n)$

(6) $x(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}u(n+1)$

7-3　分别绘出以下各序列的图形。

(1) $x(n)=\sin\left(\frac{n\pi}{5}\right)$

(2) $x(n)=\cos\left(\frac{n\pi}{10}-\frac{\pi}{5}\right)$

(3) $x(n)=\left(\frac{5}{6}\right)^{n}\sin\left(\frac{n\pi}{5}\right)$

7-4　判断以下各序列是否周期性的，如果是周期性的，试确定其周期。

(1) $x(n)=A\cos\left(\frac{3\pi}{7}n-\frac{\pi}{8}\right)$

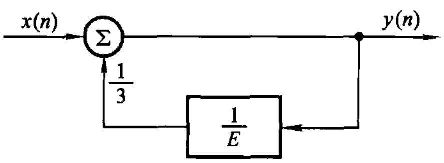
(2) $x(n)=e^{j\left(\frac{n}{8}-\pi\right)}$

7-5　列出题图 7-5 所示系统的差分方程，已知边界条件 $y(-1)=0$。分别求输入为以下序列时的输出 $y(n)$，并绘出其图形(用逐次迭代方法求)。

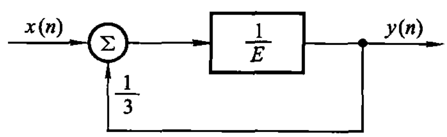
(1) $x(n)=\delta(n)$

(2) $x(n)=u(n)$

(3) $x(n)=u(n)-u(n-5)$



题图 7-5



题图 7-6

7-6　列出题图 7-6 所示系统的差分方程，已知边界条件 $y(-1)=0$ 并限定当 $n<0$ 时，全部 $y(n)=0$，若 $x(n)=\delta(n)$，求 $y(n)$。比较本题与习题 7-5 相应的结果。

7-7　在习题 7-5 中，若限定当 $n>0$ 时，全部 $y(n)=0$，以 $y(1)=0$ 为边界条件，当 $x(n)=\delta(n)$时的响应 $y(n)$，这时，可以得到一个左边序列，试解释为什么会出现这种结果。

7-8　列出题图 7-8 所示系统的差分方程，指出其阶次。

7-9　列出题图 7-9 所示系统的差分方程，指出其阶次。

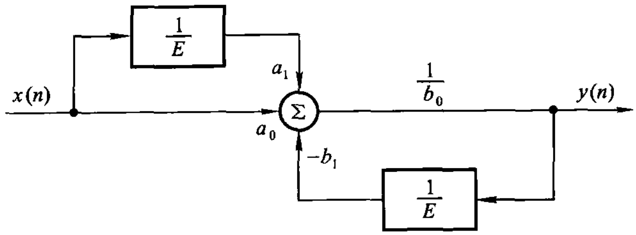
7-10　已知描述系统的差分方程表示式为

$$y(n)=\sum_{r=0}^{7}b_r x(n-r)$$

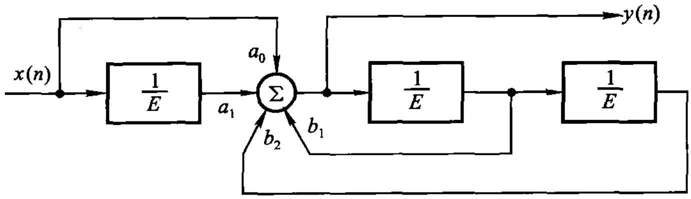
试绘出此离散系统的方框图。如果 $y(-1)=0$，$x(n)=\delta(n)$，试求 $y(n)$，指出此时 $y(n)$有何特点，这种特点与系统的结构有何关系。

7-11　解差分方程。

(1) $y(n)-\frac{1}{2}y(n-1)=0,\ y(0)=1$



题图 7－8



题图 7－9

(2) $y(n)-2y(n-1)=0, y(0)=\frac{1}{2}$

(3) $y(n)+3y(n-1)=0, y(1)=1$

(4) $y(n)+\frac{2}{3}y(n-1)=0, y(0)=1$

7－12 解差分方程。

(1) $y(n)+3y(n-1)+2y(n-2)=0, y(-1)=2, y(-2)=1$

(2) $y(n)+2y(n-1)+y(n-2)=0, y(0)=y(-1)=1$

(3) $y(n)+y(n-2)=0, y(0)=1, y(1)=2$

7－13 解差分方程。

$$y(n)-7y(n-1)+16y(n-2)-12y(n-3)=0$$
$$y(1)=-1, y(2)=-3, y(3)=-5$$

7－14 解差分方程 $y(n)=-5y(n-1)+n$。已知边界条件 $y(-1)=0$。

7－15 解差分方程 $y(n)+2y(n-1)=n-2$，已知$y(0)=1$。

7－16 解差分方程 $y(n)+2y(n-1)+y(n-2)=3^n$，已知$y(-1)=0, y(0)=0$。

7－17 解差分方程 $y(n)+y(n-2)=\sin n$，已知 $y(-1)=0, y(-2)=0$。

7－18 解差分方程 $y(n)-y(n-1)=n$，已知 $y(-1)=0$。

(1) 用迭代法逐次求出数值解，归纳一个闭式解答(对于 $n\geqslant 0$)。

(2) 分别求齐次解与特解，讨论此题应如何假设特解函数式。

7－19 如果上题中方程式改为 $y(n)-y(n-1)=n^3$，重复回答上题所问。

7－20 某系统的输入输出关系可由二阶常系数线性差分方程描述，如果相应于输入为 $x(n)=u(n)$的响应为

$$y(n)=[2^n+3(5^n)+10]u(n)$$

(1) 若系统起始为静止的，试决定此二阶差分方程。

(2) 若激励为 $x(n)=2[u(n)-u(n-10)]$，求响应 $y(n)$。

7-21 一个乒乓球从 H 米高度自由下落至地面，每次弹跳起的最高值是前一次最高值的 2/3。若以 $y(n)$ 表示第 n 次跳起的最高值，试列写描述此过程的差分方程式。又若给定 $H=2$ m，解此差分方程。

7-22 如果在第 n 个月初向银行存款 $x(n)$ 元，月利率为 a，每月利息不取出，试用差分方程写出第 n 月初的本利和 $y(n)$。设 $x(n)=10$ 元，$a=0.003$，$y(0)=20$ 元，求 $y(n)$，若 $n=12$，$y(12)$ 为多少？

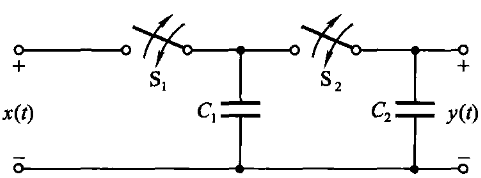
7-23 把 $x(n)$ 升的液体 A 和 $[100-x(n)]$ 升的液体 B 都倒入一容器中 [限定 $x(n)\leqslant 100$ 升]，该容器内已有 900 升的 A 与 B 之混合液。均匀混合后，再从容器倒出 100 升混合液。如此重复上述过程，在第 n 个循环结束时，若 A 在混合液中所占百分比为 $y(n)$，试列出求 $y(n)$ 的差分方程。如果已知 $x(n)=50$，$y(0)=0$，解 $y(n)$，并指出其中的自由分量与强迫分量，当 $n\to\infty$ 时 $y(n)$ 为多少？再从直觉的概念解释此结果。

7-24 “开关电容”是在集成电路中用来替代电阻的一种基本单元。在题图 7-24 中，开关 S_1、S_2（在集成芯片内由两只 MOS 晶体管实现）和电容 C_1 组成开关电容用以传送电荷，它们相当于连续系统中的电阻，再与另一电容 C_2 可构成离散系统中的一阶低通滤波器。

(1) 设 $t=nT$ 时刻输入与输出电压分别为 $x(t)=x(nT)$ 和 $y(t)=y(nT)$。在 $t=nT$ 时 S_1 通、S_2 断，$t=nT+\frac{T}{2}$ 时 S_1 断、S_2 通，利用电荷转移关系求 $y\left(nT+\frac{T}{2}\right)$ 值。

(2) 重复上述动作，当 $t=(n+1)T$ 时 S_1 通，S_2 断，当 $t=(n+1)T+\frac{T}{2}$ 时 S_1 断，S_2 通，…，列写描述 $y(n)$ 与 $x(n)$ 关系的差分方程式（令 $T=1$）。

(3) 若 $x(t)=u(t)$，求系统的零状态响应 $y(n)$ 表达式，并画 $y(t)$ 波形。



题图 7-24

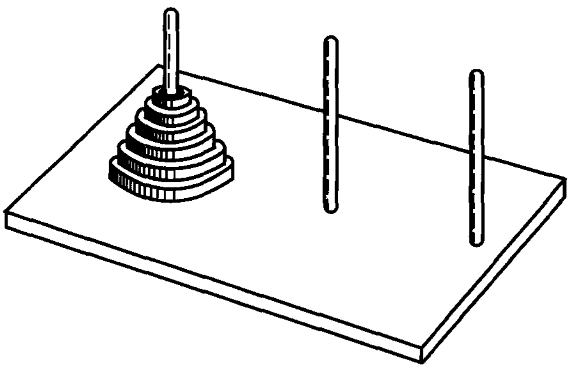
7-25 对于例 7-4 的电阻梯形网络，按所列方程式及给定之边界条件 $v(0)=E$，$v(N)=0$，求解 $v(n)$ 表示式（注意：答案中有系数 N）。如果 $N\to\infty$（无限节的梯形网络），试写出 $v(n)$ 的近似式。

7-26 对于图 7-15 所示的 RC 低通网络，如果给定 $\frac{T}{RC}=0.1$，$x(n)=u(n)$，$y(0)=0$，求解差分方程式（7-28），画出完全响应 $y(n)$ 图形，描出 10 个样点。如果激励为阶跃

信号 $x(t)=u(t)$，解微分方程求 $y(t)$，将 $y(t)$ 波形也画在 $y(n)$ 图形之同一坐标中以便比较。$\left(\text{注意，横坐标可取为 } t'=n\cdot\frac{T}{RC}\text{。}\right)$

7-27 本题讨论一个饶有兴趣的“海诺塔”(Tower of Hanoi)问题。有若干个直径逐次增加的中心有孔的圆盘。起初，它们都套在同一个木桩上(见题图 7-27)，尺寸最大的位于最下面，随尺寸减小依次向上排列。现在，将圆盘按下述规则转移到另外两个木桩上：(1)每次只准传递一个；(2)在传递过程中，不允许有大盘子位于小盘子之上；(3)可以在三个木桩之间任意传递。为使 n 个盘子转移到另一木桩，而保持其原始的上下相对位置不变，需要传递 $y(n)$ 次，列出求 $y(n)$ 的差分方程式，并求解。

[提示：$y(0)=0, y(1)=1, y(2)=3, y(3)=7, \cdots$。]



题图 7-27

7-28 以下各序列是系统的单位样值响应 $h(n)$，试分别讨论各系统的因果性与稳定性。

(1) $\delta(n)$　　(2) $\delta(n-5)$

(3) $\delta(n+4)$　　(4) $2u(n)$

(5) $u(3-n)$　　(6) $2^n u(n)$

(7) $3^n u(-n)$　　(8) $2^n[u(n)-u(n-5)]$

(9) $0.5^n u(n)$　　(10) $0.5^n u(-n)$

(11) $\frac{1}{n}u(n)$　　(12) $\frac{1}{n!}u(n)$

7-29 以下每个系统 $x(n)$ 表示激励，$y(n)$ 表示响应。判断每个激励与响应的关系是否线性的，是否时不变的。

(1) $y(n)=2x(n)+3$

(2) $y(n)=x(n)\sin\left(\frac{2\pi}{7}n+\frac{\pi}{6}\right)$

(3) $y(n)=[x(n)]^2$

(4) $y(n)=\sum_{m=-\infty}^{n} x(m)$

7-30　对于线性时不变系统：

(1) 已知激励为单位阶跃信号之零状态响应(阶跃响应)是 $g(n)$，试求冲激响应 $h(n)$；

(2) 已知冲激响应 $h(n)$，试求阶跃响应 $g(n)$。

7-31　以下各序列中，$x(n)$是系统的激励函数，$h(n)$是线性时不变系统的单位样值响应。分别求出各 $y(n)$，画 $y(n)$图形(用卷积方法)。

(1) $x(n)$，$h(n)$见题图 7-31(a)

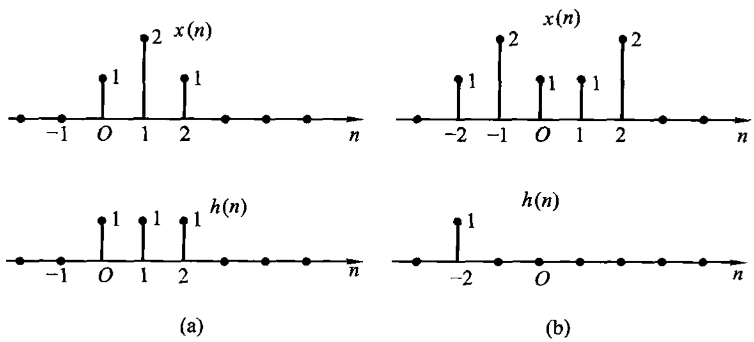
(2) $x(n)$，$h(n)$见题图 7-31(b)

(3) $x(n)=\alpha^n u(n)\quad 0<\alpha<1$

$h(n)=\beta^n u(n)\quad 0<\beta<1\quad \beta\neq\alpha$

(4) $x(n)=u(n)$

$h(n)=\delta(n-2)-\delta(n-3)$



题图 7-31

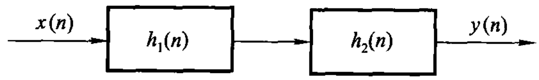
7-32　已知线性时不变系统的单位样值响应 $h(n)$以及输入 $x(n)$，求输出 $y(n)$，并绘图示出 $y(n)$。

(1) $h(n)=x(n)=u(n)-u(n-4)$

(2) $h(n)=2^n[u(n)-u(n-4)]$，$x(n)=\delta(n)-\delta(n-2)$

(3) $h(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$，$x(n)=u(n)-u(n-5)$

7-33　如题图 7-33 所示的系统包括两个级联的线性时不变系统，它们的单位样值响应分别为 $h_1(n)$和 $h_2(n)$。已知 $h_1(n)=\delta(n)-\delta(n-3)$，$h_2(n)=(0.8)^n u(n)$。令 $x(n)=u(n)$。



题图 7-33

(1) 按下式求 $y(n)$

$$y(n)=[x(n)*h_1(n)]*h_2(n)$$

(2) 按下式求 $y(n)$

$$y(n)=x(n)*[h_1(n)*h_2(n)]$$

两种方法的结果应当是一样的(卷积结合律)。

7-34 已知一线性时不变系统的单位样值响应 $h(n)$,除在 $N_0\leqslant n\leqslant N_1$ 区间之外都为零。而输入 $x(n)$除在 $N_2\leqslant n\leqslant N_3$ 区间之外均为零。这样,响应 $y(n)$除在 $N_4\leqslant n\leqslant N_5$ 之外均被限制为零。试用 N_0,N_1,N_2,N_3 来表示 N_4 与 N_5。

7-35 某地质勘探测试设备给出的发射信号 $x(n)=\delta(n)+\frac{1}{2}\delta(n-1)$,接收回波信号 $y(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$,若地层反射特性的系统函数以 $h(n)$表示,且满足 $y(n)=h(n)*x(n)$。

(1) 求 $h(n)$;

(2) 以延时、相加、倍乘运算为基本单元,试画出系统方框图。

第八章　z 变换、离散时间系统的 z 域分析

8.1　引　　言

很久以前，人们就已经认识了 z 变换方法的原理，其历史可以追溯至 18 世纪。早在 1730 年，英国数学家棣莫弗(De Moivre 1667—1754)将生成函数(generating function)的概念用于概率理论的研究，实质上，这种生成函数的形式与 z 变换相同。从 19 世纪的拉普拉斯(P.S.Laplace)至 20 世纪的沙尔(H.L.Seal)等人，在这方面继续作出贡献。然而，在那样一个较为局限的数学领域中，z 变换的概念没能得到充分运用与发展。20 世纪 50 年代与 60 年代，抽样数据控制系统和数字计算机的研究与实践，为 z 变换的应用开辟了广阔的天地，从此，在离散信号与系统的理论研究之中，z 变换成为一种重要的数学工具。它把离散系统的数学模型——差分方程转化为简单的代数方程，使其求解过程得以简化。因而，z 变换在离散系统中的地位与作用，类似于连续系统中的拉普拉斯变换。

从本节开始陆续讨论 z 变换的定义、性质以及它与拉氏变换、傅氏变换的联系。在此基础上研究离散时间系统的 z 域分析，给出离散系统的系统函数与频率响应的概念。必须指出，类似于连续系统的 s 域分析，在离散系统的 z 域分析中将看到，利用系统函数在 z 平面零、极点分布特性研究系统的时域特性、频域特性以及稳定性等方法也具有同样的重要意义。在第十章将介绍利用 z 变换构成数字滤波器的原理和初步设计方法。

在连续时间信号与系统分析中，从傅里叶变换引出拉普拉斯变换。而在本章中，对于离散时间信号与系统的研究，则是先介绍 z 变换，然后引出序列的傅里叶变换(8.9 节)以及离散傅里叶变换(第九章)。无论对于连续或离散系统，这种学习(讲授)顺序都可以更换过来。

z 变换的定义可以借助抽样信号的拉氏变换引出，也可直接对离散时间信号给予 z 变换的定义。

首先来看抽样信号的拉氏变换。若连续因果信号 $x(t)$经均匀冲激抽样，则抽样信号 $x_s(t)$的表示式为

$$x_s(t)=x(t)\cdot\delta_T(t)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)$$

式中 T 为抽样间隔。如果对上式取拉氏变换，得到

$$X_s(s) = \int_0^{\infty} x_s(t)e^{-st}dt = \int_0^{\infty} \left[\sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)\right]e^{-st}dt$$

将积分与求和的次序对调，并利用冲激函数的抽样特性，便可得到抽样信号的拉氏变换

$$X_s(s) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)e^{-snT} \tag{8-1}$$

此时，如果引入一个新的复变量 z，令

$$z = e^{sT}$$

或写为

$$s = \frac{1}{T}\ln z$$

则式(8－1)变成了复变量 z 的函数式 $X(z)$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)z^{-n} \tag{8-2}$$

该式就是下面将要定义的离散信号 $x(nT)$的 z 变换表示式。通常令 $T=1$，则式(8－1)、式(8－2)变成

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

$$z = e^{s}$$

如果序列 $x(n)$各样值与抽样信号 $x(t)\delta_T(t)$各冲激函数的强度相对应，就可借助符号 $z=e^{sT}$，将抽样信号的拉氏变换移植来表示离散时间信号的 z 变换(在 8.6 节将要看到，这种对应在个别样点不能成立，而在一般情况下完全一致)。下一节在此基础上给出 z 变换的定义。

8.2 z 变换定义、典型序列的 z 变换

与拉氏变换的定义类似，z 变换也有单边和双边之分。序列 $x(n)$的单边 z 变换定义为

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathscr{Z}[x(n)] \\ &= x(0) + \frac{x(1)}{z} + \frac{x(2)}{z^2} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} \end{aligned} \tag{8-3}$$

其中符号 $\mathscr{Z}$ 表示取 z 变换，z 是复变量。

对于一切 n 值都有定义的双边序列 $x(n)$，也可以定义双边 z 变换为

$$X(z)=\mathscr{Z}[x(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n} \tag{8-4}$$

显然，如果 $x(n)$ 为因果序列，则双边 z 变换与单边 z 变换是等同的。

式(8-3)、式(8-4)表明，序列的 z 变换是复变量 z^{-1} 的幂级数(亦称洛朗级数)，其系数是序列 $x(n)$ 值。在有些数学文献中，也把 $X(z)$ 称为序列 $x(n)$ 的生成函数。在拉氏变换分析中着重讨论单边拉氏变换，这是由于在连续时间系统中，非因果信号的应用较少。对于离散时间系统，非因果序列也有一定的应用范围，因此，将着重单边适当兼顾双边 z 变换分析。

z 变换的逆变换表达式和有关求解方法将在 8.4 节专门讨论。下面举例给出一些典型序列的 z 变换。

(一) 单位样值函数

单位样值函数 $\delta(n)$ 定义为

$$\delta(n)=\begin{cases}1 & (n=0)\\ 0 & (n\neq 0)\end{cases}$$

如图 8-1 所示。

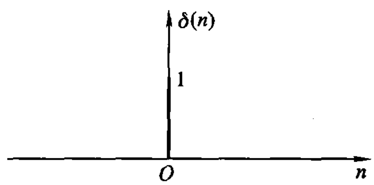


图 8-1　单位样值函数

取其 z 变换，得到

$$\mathscr{Z}[\delta(n)]=\sum_{n=0}^{\infty}\delta(n)z^{-n}=1 \tag{8-5}$$

可见，与连续系统单位冲激函数 $\delta(t)$ 的拉氏变换类似，单位样值函数 $\delta(n)$ 的 z 变换等于 1。

(二) 单位阶跃序列

单位阶跃序列 $u(n)$ 定义为

$$u(n)=\begin{cases}1 & (n\geqslant 0)\\ 0 & (n<0)\end{cases}$$

如图 8-2 所示。

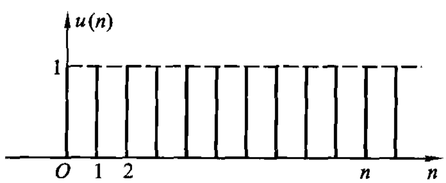


图 8-2　单位阶跃序列

取其 z 变换得到

$$\mathscr{Z}[u(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} u(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}$$

若$|z|>1$,该几何级数收敛,它等于

$$\mathscr{Z}[u(n)] = \frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-z^{-1}} \tag{8-6}$$

(三)斜变序列

斜变序列为

$$x(n) = nu(n)$$

如图 8-3 所示。

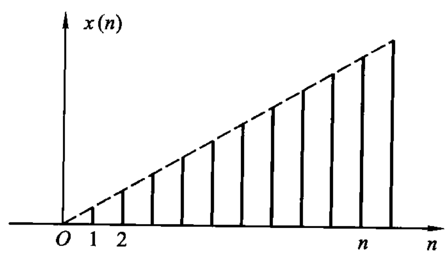


图 8-3 斜变序列

其 z 变换为

$$\mathscr{Z}[x(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} nz^{-n}$$

该 z 变换可以用下面方法间接求得。

由式(8-6),已知

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1-z^{-1}} \quad (|z|>1)$$

将上式两边分别对 z^{-1}求导,得到

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(z^{-1})^{n-1} = \frac{1}{(1-z^{-1})^2}$$

两边各乘 z^{-1},便得到了斜变序列的 z 变换,它等于

$$\mathscr{Z}[nu(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} nz^{-n} = \frac{z}{(z-1)^2} \quad (|z|>1) \tag{8-7}$$

同样,若式(8-7)两边再对 z^{-1}取导数,还可得到

$$\mathscr{Z}[n^2 u(n)] = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} \tag{8-8}$$

$$\mathscr{Z}[n^3 u(n)] = \frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4} \tag{8-9}$$

…………

(四) 指数序列

单边指数序列的表示式为

$$x(n)=a^{n}u(n)$$

如图 8-4 所示。由式(8-4)可求出它的 z 变换为

$$\mathscr{Z}[a^{n}u(n)]=\sum_{n=0}^{\infty}a^{n}z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}(az^{-1})^{n}$$

显然,对此级数若满足 $|z|>|a|$,则可收敛为

$$\mathscr{Z}[a^{n}u(n)]=\frac{1}{1-(az^{-1})}=\frac{z}{z-a}\quad(|z|>|a|)\tag{8-10}$$

若令 $a=\mathrm{e}^{b}$,当 $|z|>|\mathrm{e}^{b}|$,则

$$\mathscr{Z}[\mathrm{e}^{bn}u(n)]=\frac{z}{z-\mathrm{e}^{b}}$$

同样,若将式(8-10)两边对 z^{-1} 求导,可以推出

$$\mathscr{Z}[na^{n}u(n)]=\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^{2}}=\frac{az}{(z-a)^{2}}\tag{8-11}$$

$$\mathscr{Z}[n^{2}a^{n}u(n)]=\frac{az(z+a)}{(z-a)^{3}}\tag{8-12}$$

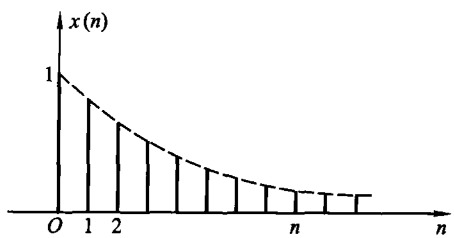


图 8-4 单边指数序列

(五) 正弦与余弦序列

单边余弦序列 $\cos(\omega_0 n)$ 如图 8-5 所示。

因

$$\mathscr{Z}[\mathrm{e}^{bn}u(n)]=\frac{z}{z-\mathrm{e}^{b}}\qquad(|z|>|\mathrm{e}^{b}|)$$

令 $b=\mathrm{j}\omega_0$,则当 $|z|>|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0}|=1$ 时,得

$$\mathscr{Z}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 n}u(n)]=\frac{z}{z-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0}}$$

同样,令 $b=-\mathrm{j}\omega_0$,则得

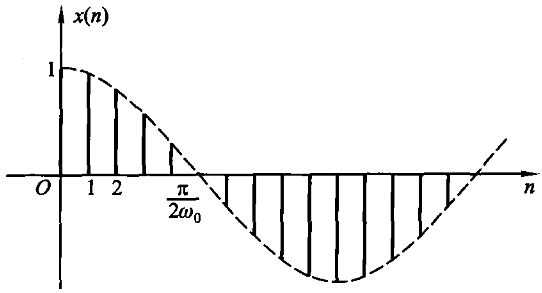


图 8-5 单边余弦序列

$$\mathscr{Z}[e^{-j\omega_0 n}u(n)]=\frac{z}{z-e^{-j\omega_0}}$$

将上两式相加,得

$$\mathscr{Z}[e^{j\omega_0 n}u(n)]+\mathscr{Z}[e^{-j\omega_0 n}u(n)]=\frac{z}{z-e^{j\omega_0}}+\frac{z}{z-e^{-j\omega_0}}$$

由 z 变换的定义可知,两序列之和的 z 变换等于各序列 z 变换的和。这样,根据欧拉公式,从上式可以直接得到余弦序列的 z 变换,它是

$$\mathscr{Z}[\cos(\omega_0 n)u(n)]=\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z-e^{j\omega_0}}+\frac{z}{z-e^{-j\omega_0}}\right)$$

$$=\frac{z(z-\cos\omega_0)}{z^2-2z\cos\omega_0+1} \tag{8-13}$$

同理可得正弦序列的 z 变换

$$\mathscr{Z}[\sin(\omega_0 n)u(n)]=\frac{1}{2j}\left(\frac{z}{z-e^{j\omega_0}}-\frac{z}{z-e^{-j\omega_0}}\right)$$

$$=\frac{z\sin\omega_0}{z^2-2z\cos\omega_0+1} \tag{8-14}$$

以上二式的收敛域都为 $|z|>1$。注意到 $\cos(\omega_0 n)u(n)$ 与 $\sin(\omega_0 n)u(n)$ 的 z 变换式分母相同。

在式(8-10)中,若令 $a=\beta e^{j\omega_0}$,则式(8-10)变为

$$\mathscr{Z}[a^n u(n)]=\mathscr{Z}[\beta^n e^{jn\omega_0}u(n)]$$

$$=\frac{1}{1-\beta e^{j\omega_0}z^{-1}}$$

同样

$$\mathscr{Z}[\beta^n e^{-jn\omega_0}u(n)]=\frac{1}{1-\beta e^{-j\omega_0}z^{-1}}$$

借助欧拉公式,由上两式可以得到

$$\mathscr{Z}[\beta^n\cos(n\omega_0)u(n)]=\frac{1-\beta z^{-1}\cos\omega_0}{1-2\beta z^{-1}\cos\omega_0+\beta^2 z^{-2}}$$

$$= \frac{z(z-\beta\cos\omega_0)}{z^2-2\beta z\cos\omega_0+\beta^2} \qquad (8-15)$$

及

$$\mathscr{Z}[\beta^n\sin(n\omega_0)u(n)] = \frac{\beta z^{-1}\sin\omega_0}{1-2\beta z^{-1}\cos\omega_0+\beta^2 z^{-2}}$$

$$= \frac{\beta z\sin\omega_0}{z^2-2\beta z\cos\omega_0+\beta^2} \qquad (8-16)$$

上两式是单边指数衰减($\beta<1$)及增幅($\beta>1$)的余弦、正弦序列的 z 变换。其收敛域为$|z|>|\beta|$。

一些典型序列的单边 z 变换列于附录五。

8.3　z 变换的收敛域

由上节求解各序列 z 变换的过程可以看到,只有当级数收敛时,z 变换才有意义。对于任意给定的有界序列 $x(n)$,使 z 变换定义式级数收敛之所有 z 值的集合,称为 z 变换 $X(z)$的收敛域(region of convergence,简写为 ROC)。

与拉氏变换的情况类似,对于单边变换,序列与变换式惟一对应,同时也有惟一的收敛域。而在双边变换时,不同的序列在不同的收敛域条件下可能映射为同一个变换式。下面举例说明这种情况。

若两序列分别为

$$x_1(n)=a^n u(n)$$

$$x_2(n)=-a^n u(-n-1)$$

容易求得它们的 z 变换分别为

$$X_1(z)=\mathscr{Z}[x_1(n)]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \frac{z}{z-a} \quad (|z|>|a|) \qquad (8-17)$$

$$X_2(z)=\mathscr{Z}[x_2(n)]$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{-1}(-a^n)z^{-n}$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}(a^{-1}z)^n+1$$

对 $X_2(z)$而言,只有当$|z|<|a|$时级数才收敛,于是有

$$X_2(z)=\frac{z}{z-a} \quad (|z|<|a|) \qquad (8-18)$$

上述结果说明,两个不同的序列由于收敛域不同,可能对应于相同的 z 变换。因此,为了单值地确定 z 变换所对应的序列,不仅要给出序列的 z 变换式,而且必须同时说明它的收敛域。在收敛域内,z 变换及它的导数是 z 的连续函数,也

就是说，z 变换函数是收敛域内每一点上的解析函数。

根据级数的理论，式(8-4)所示级数收敛的充分条件是满足绝对可和条件，即要求

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)z^{-n}|<\infty \tag{8-19}$$

上式的左边构成正项级数，通常可以利用两种方法——比值判定法和根值判定法，判别正项级数的收敛性。所谓比值判定法就是说若有一个正项级数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|a_n|$，令它的后项与前项比值的极限等于 ρ，即

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho \tag{8-20}$$

则当 $\rho<1$ 时级数收敛，$\rho>1$ 时级数发散，$\rho=1$ 时级数可能收敛也可能发散。所谓根值判定法，是令正项级数一般项 $|a_n|$ 的 n 次根的极限等于 ρ，即

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho \tag{8-21}$$

则当 $\rho<1$ 时级数收敛，$\rho>1$ 时级数发散，$\rho=1$ 时级数可能收敛也可能发散。

下面利用上述判定法讨论几类序列的 z 变换收敛域问题。

(1) 有限长序列

这类序列只在有限的区间($n_1\leqslant n\leqslant n_2$)具有非零的有限值，此时 z 变换为

$$X(z)=\sum_{n=n_1}^{n_2}x(n)z^{-n}$$

由于 n_1,n_2 是有限整数，因而上式是一个有限项级数。由该级数可以看出，当 $n_1<0,n_2>0$ 时，除 $z=\infty$ 及 $z=0$ 外，$X(z)$在 z 平面上处处收敛，即收敛域为 $0<|z|<\infty$。当 $n_1<0,n_2\leqslant 0$ 时，$X(z)$的收敛域为 $|z|<\infty$。当 $n_1\geqslant 0,n_2>0$ 时，$X(z)$的收敛域为 $|z|>0$。所以有限长序列的 z 变换收敛域至少为 $0<|z|<\infty$，且可能还包括 $z=0$ 或 $z=\infty$，由序列 $x(n)$的形式所决定。

(2) 右边序列

这类序列是有始无终的序列，即当 $n<n_1$ 时 $x(n)=0$。此时 z 变换为

$$X(z)=\sum_{n=n_1}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

由式(8-21)，若满足

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x(n)z^{-n}|}<1$$

即

$$|z|>\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x(n)|}=R_{x1} \tag{8-22}$$

则该级数收敛。其中 R_{x1}是级数的收敛半径。可见，右边序列的收敛域是半径为 R_{x1}

的圆外部分。如果 $n_1 \geq 0$，则收敛域包括 $z=\infty$，即 $|z|>R_{x1}$；如果 $n_1<0$，则收敛域不包括 $z=\infty$，即 $R_{x1}<|z|<\infty$。显然，当 $n_1=0$ 时，右边序列变成因果序列，也就是说，因果序列是右边序列的一种特殊情况，它的收敛域是 $|z|>R_{x1}$。

(3) 左边序列

这类序列是无始有终序列，即当 $n>n_2$ 时，$x(n)=0$。此时 z 变换为

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{n_2} x(n)z^{-n}$$

若令 $m=-n$，上式变为

$$X(z)=\sum_{m=-n_2}^{\infty} x(-m)z^{m}$$

如果将变量 m 再改为 n，则

$$X(z)=\sum_{n=-n_2}^{\infty} x(-n)z^{n}$$

根据式(8-21)，若满足

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x(-n)z^n|}<1$$

即

$$|z|<\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x(-n)|}}=R_{x2} \tag{8-23}$$

则该级数收敛。可见，左边序列的收敛域是半径为 R_{x2} 的圆内部分。如果 $n_2>0$，则收敛域不包括 $z=0$，即 $0<|z|<R_{x2}$。如果 $n_2 \leq 0$，则收敛域包括 $z=0$，即 $|z|<R_{x2}$。

(4) 双边序列

双边序列是从 $n=-\infty$ 延伸到 $n=+\infty$ 的序列，一般可写作

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}+\sum_{n=-\infty}^{-1} x(n)z^{-n}$$

显然，可以把它看成右边序列和左边序列的 z 变换叠加。上式右边第一个级数是右边序列，其收敛域为 $|z|>R_{x1}$；第二个级数是左边序列，收敛域为 $|z|<R_{x2}$。如果 $R_{x2}>R_{x1}$，则 $X(z)$ 的收敛域是两个级数收敛域的重叠部分，即

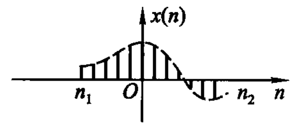
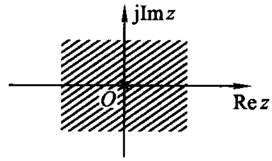
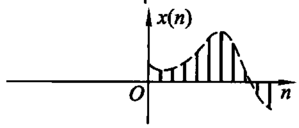
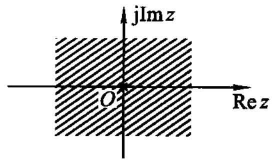
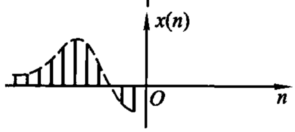
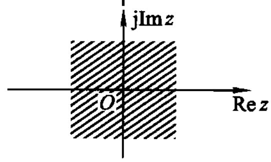
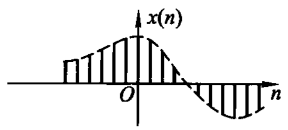
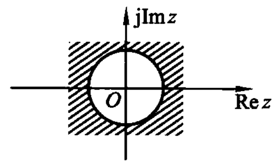
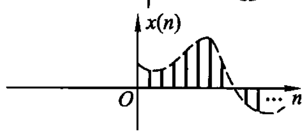
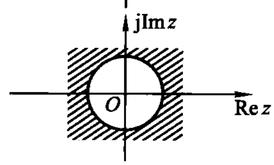
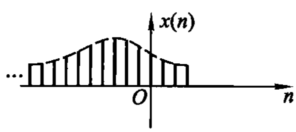
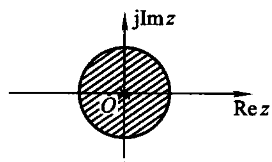
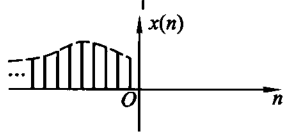
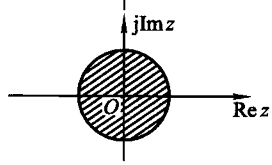
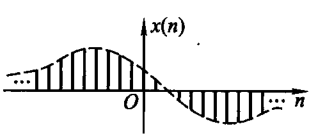
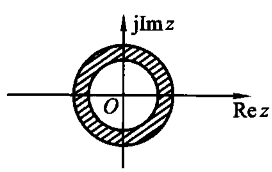
$$R_{x1}<|z|<R_{x2}$$

其中 $R_{x1}>0$，$R_{x2}<\infty$。所以，双边序列的收敛域通常是环形。如果 $R_{x1}>R_{x2}$，则两个级数不存在公共收敛域，此时 $X(z)$ 不收敛。

上面讨论了各种序列的双边 z 变换的收敛域，显然，收敛域取决于序列的形式。为便于对比，将上述几类序列的双边 z 变换收敛域列于表 8-1。

应当指出，任何序列的单边 z 变换收敛域和因果序列的收敛域类同，它们都是 $|z|>R_{x1}$。

表 8－1　序列的形式与双边 z 变换收敛域的关系

序列形式		z 变换收敛域	
有限长序列 ① $n_1<0$，$n_2>0$			$\infty>\|z\|>0$
② $n_1\geqslant 0$，$n_2>0$			$\|z\|>0$
③ $n_1<0$，$n_2\leqslant 0$			$\infty>\|z\|$
右边序列 ① $n_1<0$，$n_2=\infty$			$\infty>\|z\|>R_{x1}$
② $n_1\geqslant 0$，$n_2=\infty$ （因果序列）			$\|z\|>R_{x1}$
左边序列 ① $n_1=-\infty$，$n_2>0$			$R_{x2}>\|z\|>0$
② $n_1=-\infty$，$n_2\leqslant 0$			$R_{x2}>\|z\|$
双边序列 $n_1=-\infty$ $n_2=\infty$			$R_{x2}>\|z\|>R_{x1}$

例 8-1　求序列 $x(n)=a^n u(n)-b^n u(-n-1)$ 的 z 变换，并确定它的收敛域(其中 $b>a, b>0, a>0$)。

解

这是一个双边序列，假若求单边 z 变换，它等于

$$
\begin{aligned}
X(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} [a^n u(n) - b^n u(-n-1)] z^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n}
\end{aligned}
$$

如果 $|z|>a$，则上面的级数收敛，这样得到

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \frac{z}{z-a}$$

其零点位于 $z=0$，极点位于 $z=a$，收敛域为 $|z|>a$。

假若求序列的双边 z 变换，它等于

$$
\begin{aligned}
X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [a^n u(n) - b^n u(-n-1)] z^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} - \sum_{n=-\infty}^{-1} b^n z^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} + 1 - \sum_{n=0}^{\infty} b^{-n} z^{n}
\end{aligned}
$$

如果 $|z|>a$，$|z|<b$，则上面的级数收敛，得到

$$
\begin{aligned}
X(z) &= \frac{z}{z-a} + 1 + \frac{b}{z-b} \\
&= \frac{z}{z-a} + \frac{z}{z-b}
\end{aligned}
$$

显然，该序列的双边 z 变换的零点位于 $z=0$ 及 $z=\frac{a+b}{2}$，极点位于 $z=a$ 与 $z=b$，收敛域为 $b>|z|>a$，如图 8-6 所示。由该例可以看出，由于 $X(z)$ 在收敛域内是解析的，因此收敛域内不应该包含任何极点。通常，收敛域以极点为边界。对于多个极点的情况，右边序列之收敛域是从 $X(z)$ 最外面(最大值)有限极点向外延伸至 $z\to\infty$(可能包括 ∞)；左边序列之收敛域是从 $X(z)$ 最里边(最小值)非零极点向内延伸至 $z=0$(可能包括 $z=0$)。

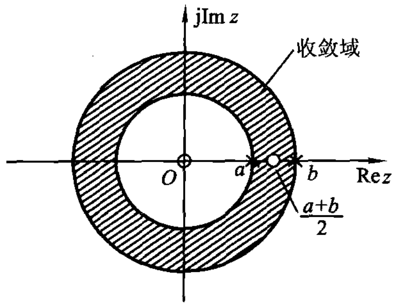


图 8-6 双边指数序列 $a^n u(n)-b^n u(-n-1)$ 的 z 变换零极点与收敛域

8.4 逆 z 变换

若已知序列 $x(n)$ 的 z 变换为

$$X(z)=\mathscr{Z}[x(n)]$$

则 $X(z)$ 的逆变换记作 $\mathscr{Z}^{-1}[X(z)]$，并由以下围线积分给出

$$x(n)=\mathscr{Z}^{-1}[X(z)]=\frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}\mathrm{d}z \tag{8-24}$$

C 是包围 $X(z)z^{n-1}$ 所有极点之逆时针闭合积分路线，通常选择 z 平面收敛域内以原点为中心的圆，如图 8-7 所示。

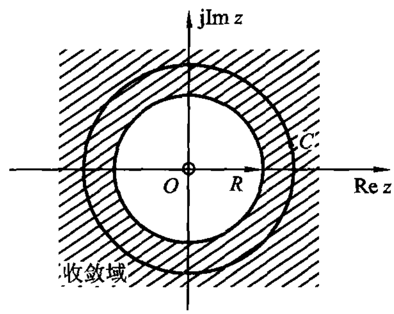


图 8-7 逆 z 变换积分围线的选择

下面从 z 变换定义表达式导出逆变换式(8-24)。已知

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

对此式两端分别乘以 z^{m-1}，然后沿围线 C 积分，得到

$$\oint_C z^{m-1}X(z)\mathrm{d}z=\oint_C\Big[\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}\Big]z^{m-1}\mathrm{d}z$$

将积分与求和的次序互换，上式变成

$$\oint_C X(z)z^{m-1}\mathrm{d}z=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)\oint_C z^{m-n-1}\mathrm{d}z \tag{8-25}$$

根据复变函数中的柯西定理，已知

$$\oint_C z^{k-1}\mathrm{d}z=\begin{cases}2\pi\mathrm{j} & (k=0)\\ 0 & (k\neq 0)\end{cases}$$

这样，式(8－25)的右边只存在 $m=n$ 一项，其余均等于零。于是式(8－25)变成

$$\oint_C X(z)z^{n-1}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{j}x(n)$$

即

$$x(n)=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\oint_C X(z)z^{n-1}\mathrm{d}z \tag{8-26}$$

逆变换式(8－24)得证。

求逆变换的计算方法有三种：对式(8－24)作围线积分(也称留数法)，或仿照拉氏变换的方法将 $X(z)$ 函数式用部分分式展开，经查表求出逐项的逆变换再取和，此外，还可借助长除法将 $X(z)$ 展开幂级数得到 $x(n)$。显然，部分分式展开法比较简便，因此应用最多，对于另外两种方法仅作简要说明，下面分别介绍。

(一) 围线积分法(留数法)

由于围线 C 在 $X(z)$ 的收敛域内，且包围着坐标原点，而 $X(z)$ 又在 $|z|>R$ 的区域内收敛，因此 C 包围了 $X(z)$ 的奇点。通常 $X(z)z^{n-1}$ 是 z 的有理函数，其奇点都是孤立奇点(极点)。这样，借助于复变函数的留数定理，可以把式(8－26)的积分表示为围线 C 内所包含 $X(z)z^{n-1}$ 的各极点留数之和，即

$$\begin{aligned}x(n)&=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\oint_C X(z)z^{n-1}\mathrm{d}z\\&=\sum_m[X(z)z^{n-1}\text{在 } C \text{ 内极点的留数}]\end{aligned}$$

或简写为

$$x(n)=\sum_m \mathrm{Res}[X(z)z^{n-1}]_{z=z_m} \tag{8-27}$$

式中 Res 表示极点的留数，z_m 为 $X(z)z^{n-1}$ 的极点。

如果 $X(z)z^{n-1}$ 在 $z=z_m$ 处有 s 阶极点，此时它的留数由下式确定

$$\mathrm{Res}[X(z)z^{n-1}]_{z=z_m}=\frac{1}{(s-1)!}\left\{\frac{\mathrm{d}^{s-1}}{\mathrm{d}z^{s-1}}[(z-z_m)^sX(z)z^{n-1}]\right\}_{z=z_m} \tag{8-28}$$

若只含有一阶极点，即 $s=1$，此时式(8－28)可以简化为

$$\mathrm{Res}[X(z)z^{n-1}]_{z=z_m}=[(z-z_m)X(z)z^{n-1}]_{z=z_m} \tag{8-29}$$

在利用式(8－27)～式(8－29)的时候，应当注意收敛域内围线所包围的极点情况，特别要关注对于不同 n 值，在 $z=0$ 处的极点可能具有不同阶次。

例 8 - 2 求 $X(z)=\frac{z^2}{(z-1)(z-0.5)}$,($|z|>1$)的逆变换。

解

由式(8 - 27)知 $X(z)$的逆变换为

$$x(n)=\sum_m \text{Res}\left[\frac{z^{n+1}}{(z-1)(z-0.5)}\right]_{z=z_m}$$

当 $n\geqslant-1$ 时在 $z=0$ 点没有极点,仅在 $z=1$ 和 $z=0.5$ 处有一阶极点,可求得

$$\text{Res}\left[\frac{z^{n+1}}{(z-1)(z-0.5)}\right]_{z=1}=2$$

$$\text{Res}\left[\frac{z^{n+1}}{(z-1)(z-0.5)}\right]_{z=0.5}=-(0.5)^n$$

由此写出

$$x(n)=[2-(0.5)^n]u(n+1)$$

实际上,当 $n=-1$ 时 $x(n)=0$,因此上式可简写为

$$x(n)=[2-(0.5)^n]u(n)$$

当 $n<-1$ 时,在 $z=0$ 处有极点存在,不难求得与此点相应的留数和上面两极点处之留数总和值为零,因此 $x(n)$都等于零。本题的答案就是上面求得的因果序列 $x(n)$,这与收敛域条件($|z|>1$)一致。

如果本题的 $X(z)$保持不变,而收敛域改为$|z|<0.5$,积分围线应选在半径为 0.5 的圆之内。当 $n>-1$ 时,围线积分等于零,相应的 $u(n)$都为零;而当 $n<-1$时,$z=0$ 处有极点存在,求解围线积分后可得到 $u(n)$为左边序列,此结果也与收敛条件($|z|<0.5$)相符合。

另一种情况是收敛域为圆环($0.5<|z|<1$)。这时,积分围线应选在半径为 0.5 至 1 的圆环之内,所求得 $x(n)$是双边序列。

综上所述,对于同一个 $X(z)$表达式,当给定的收敛域不同时,所选择之积分围线也不相同,最后将得到不同的逆变换序列 $x(n)$。

(二) 幂级数展开法(长除法)

因为 $x(n)$的 z 变换定义为 z^{-1}的幂级数

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

所以,只要在给定的收敛域内把 $X(z)$展成幂级数,级数的系数就是序列$x(n)$。

在一般情况下,$X(z)$是有理函数,令分子多项式为 $N(z)$,分母多项式为 $D(z)$。如果 $X(z)$的收敛域是$|z|>R_{x1}$,则 $x(n)$必然是因果序列,此时 $N(z)$,$D(z)$按 z 的降幂(或 z^{-1}的升幂)次序进行排列。如果收敛域是$|z|<$

R_{x2}，则 $x(n)$必然是左边序列，此时 $N(z)$，$D(z)$按 z 的升幂(或 z^{-1}的降幂)次序进行排列。然后利用长除法，便可将 $X(z)$展成幂级数，从而得到 $x(n)$。

例 8-3 求 $X(z)=\dfrac{z}{(z-1)^2}$的逆变换 $x(n)$(收敛域为$|z|>1$)。

解

由于 $X(z)$的收敛域是$|z|>1$，因而 $x(n)$必然是因果序列。此时 $X(z)$按 z 的降幂排列成下列形式

$$X(z)=\frac{z}{z^2-2z+1}$$

进行长除

$$\begin{array}{r l}
 & z^{-1}+2z^{-2}+3z^{-3}+\cdots \\
z^2-2x+1 \big) & z \\
 & \underline{z-2+z^{-1}} \\
 & \quad 2-z^{-1} \\
 & \quad \underline{2-4z^{-1}+2z^{-2}} \\
 & \qquad 3z^{-1}-2z^{-2} \\
 & \qquad \underline{3z^{-1}-6z^{-2}+3z^{-3}} \\
 & \qquad\qquad 4z^{-2}-3z^{-3} \\
 & \qquad\qquad \cdots
\end{array}$$

所以

$$\begin{aligned}X(z)&=z^{-1}+2z^{-2}+3z^{-3}+\cdots\\&=\sum_{n=0}^{\infty}nz^{-n}\end{aligned}$$

得到

$$x(n)=nu(n)$$

例 8-4 求收敛域分别为$|z|>1$和$|z|<1$两种情况下，$X(z)=\dfrac{1+2z^{-1}}{1-2z^{-1}+z^{-2}}$的逆变换 $x(n)$。

解

对于收敛域$|z|>1$，$X(z)$相应的序列 $x(n)$是因果序列，这时 $X(z)$写成

$$X(z)=\frac{1+2z^{-1}}{1-2z^{-1}+z^{-2}}$$

进行长除，展成级数

$$\begin{aligned}X(z)&=1+4z^{-1}+7z^{-2}+\cdots\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(3n+1)z^{-n}\end{aligned}$$

得到

$$x(n)=(3n+1)u(n)$$

若收敛域为 $|z|<1$，则 $X(z)$ 相对应的序列 $x(n)$ 是左边序列。此时 $X(z)$ 写为

$$X(z)=\frac{2z^{-1}+1}{z^{-2}-2z^{-1}+1}$$

进行长除，展成级数

$$\begin{aligned}X(z)&=2z+5z^2+\cdots\\&=\sum_{n=1}^{\infty}(3n-1)z^n\\&=-\sum_{n=-\infty}^{-1}(3n+1)z^{-n}\end{aligned}$$

得到

$$x(n)=-(3n+1)u(-n-1)$$

（三）部分分式展开法

序列的 z 变换通常是 z 的有理函数，可表示为有理分式形式。类似于拉氏变换中部分分式展开法，在这里，也可以先将 $X(z)$ 展成一些简单而常见的部分分式之和，然后分别求出各部分分式的逆变换，把各逆变换相加即可得到 $x(n)$。

z 变换的基本形式为 $\frac{z}{z-z_m}$，在利用 z 变换的部分分式展开法的时候，通常先将 $\frac{X(z)}{z}$ 展开，然后每个分式乘以 z，这样对于一阶极点，$X(z)$ 便可展成 $\frac{z}{z-z_m}$ 形式。

下面先给出一个简单的例题，然后讨论部分分式展开法的一般公式。

例 8-5 用部分分式展开法求解 $X(z)=\frac{z^2}{z^2-1.5z+0.5}$ 的逆变换 $x(n)$ $(|z|>1)$。

解 本题与例 8-2 相同。

$$X(z)=\frac{z^2}{(z-1)(z-0.5)}$$

只包含一阶极点 $z_1=0.5$，$z_2=1$。得到以下展开式

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{A_1}{z-0.5}+\frac{A_2}{z-1}$$

式中

$$A_1=\left[\frac{X(z)}{z}(z-0.5)\right]_{z=0.5}=-1$$

$$A_2=\left[\frac{X(z)}{z}(z-1)\right]_{z=1}=2$$

$X(z)$展为

$$X(z)=\frac{2z}{z-1}-\frac{z}{z-0.5}$$

因为$|z|>1$,所以 $x(n)$是因果序列,由 8.2 节导出的 z 变换关系式得到

$$x(n)=(2-0.5^n)u(n)$$

与例 8-2 的结果相同,而求解过程比较简便。

一般情况下,$X(z)$表达式为

$$X(z)=\frac{N(z)}{D(z)}=\frac{b_0+b_1z+\cdots+b_{r-1}z^{r-1}+b_rz^r}{a_0+a_1z+\cdots+a_{k-1}z^{k-1}+a_kz^k} \tag{8-30}$$

对于因果序列,它的 z 变换收敛域为$|z|>R$,为保证在 $z=\infty$处收敛,其分母多项式的阶次不低于分子多项式的阶次,即满足 $k\geqslant r$。

如果 $X(z)$只含有一阶极点,则$\frac{X(z)}{z}$可以展为

$$\frac{X(z)}{z}=\sum_{m=0}^{K}\frac{A_m}{z-z_m}$$

即

$$X(z)=\sum_{m=0}^{K}\frac{A_mz}{z-z_m} \tag{8-31}$$

式中 z_m 是$\frac{X(z)}{z}$的极点,A_m 是 z_m 的留数,它等于

$$A_m=\text{Res}\left[\frac{X(z)}{z}\right]_{z=z_m}=\left[(z-z_m)\frac{X(z)}{z}\right]_{z=z_m}$$

或者把式(8-31)表示成

$$X(z)=A_0+\sum_{m=1}^{K}\frac{A_mz}{z-z_m} \tag{8-32}$$

在这里,z_m 是 $X(z)$的极点,而 A_0 是

$$A_0=[X(z)]_{z=0}=\frac{b_0}{a_0}$$

如果 $X(z)$中含有高阶极点,式(8-31)、式(8-32)应当加以修正,若 $X(z)$除含有 M 个一阶极点外,在 $z=z_i$ 处还含有一个 s 阶极点,此时 $X(z)$应展成

$$X(z)=\sum_{m=0}^{M}\frac{A_mz}{z-z_m}+\sum_{j=1}^{s}\frac{B_jz}{(z-z_i)^j}$$

$$=A_0+\sum_{m=1}^{M}\frac{A_mz}{z-z_m}+\sum_{j=1}^{s}\frac{B_jz}{(z-z_i)^j}$$

式中 A_m 的确定方法与前相同，而 B_j 等于

$$B_j = \frac{1}{(s-j)!}\left[\frac{\mathrm{d}^{s-j}}{\mathrm{d}z^{s-j}}(z-z_i)^s \quad \frac{X(z)}{z}\right]_{z=z_i}$$

在这种情况下，$X(z)$也可展为下列形式

$$X(z) = A_0 + \sum_{m=1}^{M} \frac{A_m z}{z - z_m} + \sum_{j=1}^{s} \frac{C_j z^j}{(z-z_i)^j}$$

其中，对于 $j=s$ 项系数

$$C_s = \left[\left(\frac{z-z_i}{z}\right)^s X(z)\right]_{z=z_i}$$

其他各 C_j 系数由待定系数法求出。

在这两种展开式中，部分分式的基本形式是$\frac{z}{(z-z_i)^j}$ 或$\frac{z^j}{(z-z_i)^j}$。在表 8－2至表 8－4 中给出了相应的逆变换。其中，表 8－2 是$|z|>a$ 对应右边序列的情况，而表 8－3 是$|z|<a$ 为左边序列。由表 8－2 利用延时定理容易导出补充表 8－4。作为练习，读者还可由表 8－3 导出类似的补充表。在查表时应注意收敛域条件，例如对于例 8－5 给定的收敛域($|z|>1$)可查得 $x(n)=2u(n)-(0.5)^n u(n)$，若此题 $X(z)$不改变，而收敛域为$|z|<0.5$ 时，则查得 $x(n)=[-2+(0.5)^n]u(-n-1)$，若收敛域为环形 $0.5<|z|<1$，则$x(n)=-(0.5)^n u(n)-2u(-n-1)$。

表 8－2 逆 z 变换表(一)

z 变换($\|z\|>\|a\|$)	序 列
$\frac{z}{(z-1)}$	$u(n)$
$\frac{z}{(z-a)}$	$a^n u(n)$
$\frac{z^2}{(z-a)^2}$	$(n+1)a^n u(n)$
$\frac{z^3}{(z-a)^3}$	$\frac{(n+1)(n+2)}{2!}a^n u(n)$
$\frac{z^4}{(z-a)^4}$	$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3!}a^n u(n)$
$\frac{z^{m+1}}{(z-a)^{m+1}}$	$\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}{m!}a^n u(n)$

表 8-3　逆 z 变换表(二)

z 变换($\lvert z\rvert<\lvert a\rvert$)	序　列
$\frac{z}{(z-1)}$	$-u(-n-1)$
$\frac{z}{(z-a)}$	$-a^n u(-n-1)$
$\frac{z^2}{(z-a)^2}$	$-(n+1)a^n u(-n-1)$
$\frac{z^3}{(z-a)^3}$	$-\frac{(n+1)(n+2)}{2!}a^n u(-n-1)$
$\frac{z^4}{(z-a)^4}$	$-\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3!}a^n u(-n-1)$
$\frac{z^{m+1}}{(z-a)^{m+1}}$	$-\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}{m!}a^n u(-n-1)$

表 8-4　逆 z 变换表(三)

z 变换($\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$)	序　列
$\frac{z}{(z-1)^2}$	$nu(n)$
$\frac{az}{(z-a)^2}$	$na^n u(n)$
$\frac{z}{(z-1)^3}$	$\frac{n(n-1)}{2!}u(n)$
$\frac{z}{(z-1)^4}$	$\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}u(n)$
$\frac{z}{(z-1)^{m+1}}$	$\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}u(n)$

8.5　z 变换的基本性质

(一)线性

z 变换的线性表现在它的叠加性与均匀性,若

$$\mathscr{Z}[x(n)]=X(z)\quad (R_{x1}<\lvert z\rvert<R_{x2})$$

$$\mathscr{Z}[y(n)]=Y(z)\quad (R_{y1}<\lvert z\rvert<R_{y2})$$

则

$$\mathscr{Z}[ax(n)+by(n)]=aX(z)+bY(z)\qquad (8-33)$$

$$(R_1<\lvert z\rvert<R_2)$$

其中 a,b 为任意常数。

相加后序列的 z 变换收敛域一般为两个收敛域的重叠部分，即 R_1 取 R_{x1} 与 R_{y1} 中较大者，而 R_2 取 R_{x2} 与 R_{y2} 中较小者，记作 $\max(R_{x1},R_{y1})<|z|<\min(R_{x2},R_{y2})$。然而，如果在这些线性组合中某些零点与极点相抵消，则收敛域可能扩大。

例 8-6 求序列 $a^nu(n)-a^nu(n-1)$的 z 变换。

解 已知

$$x(n)=a^nu(n)$$
$$y(n)=a^nu(n-1)$$

由式(8-10)知

$$X(z)=\frac{z}{z-a}\quad(|z|>|a|)$$

而

$$\begin{aligned}Y(z)&=\sum_{n=0}^{\infty}y(n)z^{-n}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}a^nz^{-n}\\&=\frac{a}{z-a}\quad(|z|>|a|)\end{aligned}$$

所以

$$\mathscr{Z}[a^nu(n)-a^nu(n-1)]=X(z)-Y(z)=1$$

可见，线性叠加后序列的 z 变换收敛域可能扩大，在此例中由$|z|>|a|$扩展到全 z 平面。

例 8-7 求下列双曲余弦和双曲正弦序列的 z 变换：

$$x(n)=\cosh(n\omega_0)u(n)$$
$$x(n)=\sinh(n\omega_0)u(n)$$

解

仍由式(8-10)知

$$\mathscr{Z}[\mathrm{e}^{n\omega_0}u(n)]=\frac{z}{z-\mathrm{e}^{\omega_0}}\quad(|z|>|\mathrm{e}^{\omega_0}|)$$

$$\mathscr{Z}[\mathrm{e}^{-n\omega_0}u(n)]=\frac{z}{z-\mathrm{e}^{-\omega_0}}\quad(|z|>|\mathrm{e}^{-\omega_0}|)$$

根据 z 变换的线性特性和双曲函数的定义，可得

$$\begin{aligned}\mathscr{Z}[\cosh(n\omega_0)u(n)]&=\mathscr{Z}\left[\left(\frac{\mathrm{e}^{n\omega_0}+\mathrm{e}^{-n\omega_0}}{2}\right)u(n)\right]\\&=\frac{1}{2}\mathscr{Z}[\mathrm{e}^{n\omega_0}u(n)]+\frac{1}{2}\mathscr{Z}[\mathrm{e}^{-n\omega_0}u(n)]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{z}{2(z - e^{\omega_0})} + \frac{z}{2(z - e^{-\omega_0})} \\
&= \frac{z(z - \cosh \omega_0)}{z^2 - 2z\cosh \omega_0 + 1}
\end{aligned}
$$

同样可得

$$
\begin{aligned}
\mathscr{Z}[\sinh(n\omega_0)u(n)] &= \mathscr{Z}\left[\left(\frac{e^{n\omega_0} - e^{-n\omega_0}}{2}\right)u(n)\right] \\
&= \frac{z}{2(z - e^{\omega_0})} - \frac{z}{2(z - e^{-\omega_0})} \\
&= \frac{z\sinh \omega_0}{z^2 - 2z\cosh \omega_0 + 1}
\end{aligned}
$$

上两 z 变换式的收敛域均为 $|z| > \max(|e^{\omega_0}|, |e^{-\omega_0}|)$，若 ω_0 为正实数，则为 $|z| > e^{\omega_0}$。

(二) 位移性(时移特性)

位移性表示序列位移后的 z 变换与原序列 z 变换的关系。在实际中可能遇到序列的左移(超前)或右移(延迟)两种不同情况，所取的变换形式又可能有单边 z 变换与双边 z 变换，它们的位移性基本相同，但又各具不同的特点。下面分几种情况进行讨论。

(1) 双边 z 变换

若序列 $x(n)$ 的双边 z 变换为

$$\mathscr{Z}[x(n)] = X(z)$$

则序列右移后，它的双边 z 变换等于

$$\mathscr{Z}[x(n-m)] = z^{-m}X(z)$$

证明

根据双边 z 变换的定义，可得

$$
\begin{aligned}
\mathscr{Z}[x(n-m)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-m)z^{-n} \\
&= z^{-m}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-k} \\
&= z^{-m}X(z) \qquad (8-34)
\end{aligned}
$$

同样，可得左移序列的双边 z 变换

$$\mathscr{Z}[x(n+m)] = z^{m}X(z) \qquad (8-35)$$

式中 m 为任意正整数。由式(8-34)、式(8-35)可以看出，序列位移只会使 z 变换在 $z=0$ 或 $z=\infty$ 处的零极点情况发生变化。如果 $x(n)$ 是双边序列，$X(z)$ 的收敛域为环形区域(即 $R_{x1} < |z| < R_{x2}$)，在这种情况下序列位移并不会使 z 变换收敛域发生变化。

(2) 单边 z 变换

若 $x(n)$是双边序列,其单边 z 变换为

$$\mathscr{Z}[x(n)u(n)] = X(z)$$

则序列左移后,它的单边 z 变换等于

$$\mathscr{Z}[x(n+m)u(n)] = z^m[X(z) - \sum_{k=0}^{m-1} x(k)z^{-k}] \tag{8-36}$$

证明

根据单边 z 变换的定义,可得

$$\begin{aligned}\mathscr{Z}[x(n+m)u(n)] &= \sum_{n=0}^{\infty} x(n+m)z^{-n} \\ &= z^m \sum_{n=0}^{\infty} x(n+m)z^{-(n+m)} \\ &= z^m \sum_{k=m}^{\infty} x(k)z^{-k} \\ &= z^m\left[\sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} - \sum_{k=0}^{m-1} x(k)z^{-k}\right] \\ &= z^m\left[X(z) - \sum_{k=0}^{m-1} x(k)z^{-k}\right]\end{aligned}$$

同样,可以得到右移序列的单边 z 变换

$$\mathscr{Z}[x(n-m)u(n)] = z^{-m}\left[X(z) + \sum_{k=-m}^{-1} x(k)z^{-k}\right] \tag{8-37}$$

式中 m 为正整数。对于 $m=1,2$ 的情况,式(8-36)、式(8-37)可以写作

$$\begin{aligned}\mathscr{Z}[x(n+1)u(n)] &= zX(z) - zx(0) \\ \mathscr{Z}[x(n+2)u(n)] &= z^2X(z) - z^2x(0) - zx(1) \\ \mathscr{Z}[x(n-1)u(n)] &= z^{-1}X(z) + x(-1) \\ \mathscr{Z}[x(n-2)u(n)] &= z^{-2}X(z) + z^{-1}x(-1) + x(-2)\end{aligned}$$

如果 $x(n)$是因果序列,则式(8-37)右边的 $\sum\limits_{k=-m}^{-1} x(k)z^{-k}$项都等于零。于是右移序列的单边 z 变换变为

$$\mathscr{Z}[x(n-m)u(n)] = z^{-m}X(z) \tag{8-38}$$

而左移序列的单边 z 变换仍为

$$\mathscr{Z}[x(n+m)u(n)] = z^m[X(z) - \sum_{k=0}^{m-1} x(k)z^{-k}] \tag{8-39}$$

例 8-8 已知差分方程表示式

$$y(n) - 0.9y(n-1) = 0.05u(n)$$

边界条件 $y(-1)=0$,用 z 变换方法求系统响应$y(n)$。(此题条件与前章例 7-

10 相同，改用 z 变换法求解。）

解

对方程式两端分别取 z 变换，注意用到位移性定理。

$$Y(z)-0.9z^{-1}Y(z)=\frac{0.05z}{z-1}$$

$$Y(z)=\frac{0.05z^2}{(z-0.9)(z-1)}$$

为求得逆变换，令

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{A_1}{z-0.9}+\frac{A_2}{z-1}$$

容易求得

$$A_1=\left(\frac{0.05z}{z-1}\right)_{z=0.9}=-0.45$$

$$A_2=\left(\frac{0.05z}{z-0.9}\right)_{z=1}=0.5$$

$$Y(z)=\frac{-0.45z}{z-0.9}+\frac{0.5z}{z-1}$$

$$y(n)=[-0.45\times(0.9)^n+0.5]u(n)$$

与例 7－10 的答案完全一致。

本例初步说明如何用 z 变换方法求解差分方程。这里，只需利用 z 变换的两个性质，即线性和位移性。用 z 变换求解差分方程的详细讨论将在 8.7 节给出。

（三）序列线性加权（z 域微分）

若已知

$$X(z)=\mathscr{Z}[x(n)]$$

则

$$\mathscr{Z}[nx(n)]=-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}X(z)$$

证明

因为

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

将上式两边对 z 求导数，得

$$\frac{\mathrm{d}X(z)}{\mathrm{d}z}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n} \tag{8-40}$$

交换求导与求和的次序，上式变为

$$\frac{\mathrm{d}X(z)}{\mathrm{d}z}=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z^{-n})$$

$$= -z^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} nx(n)z^{-n}$$

$$= -z^{-1}\mathscr{Z}[nx(n)]$$

所以

$$\mathscr{Z}[nx(n)] = -z\frac{\mathrm{d}X(z)}{\mathrm{d}z} \tag{8-41}$$

可见序列线性加权(乘 n)等效于其 z 变换取导数且乘以($-z$)。

如果将 $nx(n)$再乘以 n,利用式(8-41)可得

$$\mathscr{Z}[n^2x(n)] = \mathscr{Z}[n\cdot nx(n)]$$

$$= -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathscr{Z}[nx(n)]$$

$$= -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}X(z)\right]$$

即

$$\mathscr{Z}[n^2x(n)] = z^2\frac{\mathrm{d}^2X(z)}{\mathrm{d}z^2} + z\frac{\mathrm{d}X(z)}{\mathrm{d}z} \tag{8-42}$$

用同样的方法,可以得到

$$\mathscr{Z}[n^mx(n)] = \left[-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right]^m X(z) \tag{8-43}$$

式中符号$\left[-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right]^m$表示

$$-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left\{-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\cdots\left(-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}X(z)\right)\right]\right\}$$

共求导 m 次。

例 8-9 若已知 $\mathscr{Z}[u(n)] = \frac{z}{z-1}$,求斜变序列 $nu(n)$的 z 变换。

解

由式(8-41)可得

$$\mathscr{Z}[nu(n)] = -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathscr{Z}[u(n)]$$

$$= -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{z}{z-1}\right)$$

$$= \frac{z}{(z-1)^2}$$

显然与式(8-7)的结果完全一致。

(四) 序列指数加权(z 域尺度变换)

若已知

$$X(z) = \mathscr{Z}[x(n)] \quad (R_{x1} < |z| < R_{x2})$$

则

$$\mathscr{Z}[a^n x(n)] = X\left(\frac{z}{a}\right) \quad \left(R_{x1} < \left|\frac{z}{a}\right| < R_{x2}\right)$$

（a 为非零常数）

证明

因为

$$\mathscr{Z}[a^n x(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} a^n x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)\left(\frac{z}{a}\right)^{-n}$$

所以

$$\mathscr{Z}[a^n x(n)] = X\left(\frac{z}{a}\right) \tag{8-44}$$

可见，$x(n)$乘以指数序列等效于 z 平面尺度展缩。同样可以得到下列关系：

$$\mathscr{Z}[a^{-n} x(n)] = X(az) \quad R_{x1} < |az| < R_{x2} \tag{8-45}$$

$$\mathscr{Z}[(-1)^n x(n)] = X(-z) \quad R_{x1} < |z| < R_{x2} \tag{8-46}$$

例如，对于$(-1)^n u(n)$若取单边 z 变换应有

$$\mathscr{Z}[(-1)^n u(n)] = \frac{z}{z+1}, |z| > 1$$

例 8-10 若已知 $\mathscr{Z}[\cos(n\omega_0)u(n)]$，求序列 $\beta^n \cos(n\omega_0)u(n)$的 z 变换。

解

由式(8-13)已知

$$\mathscr{Z}[\cos(n\omega_0)u(n)] = \frac{z(z-\cos\omega_0)}{z^2 - 2z\cos\omega_0 + 1} \quad (|z|>1)$$

根据式(8-44)可以得到

$$\mathscr{Z}[\beta^n \cos(n\omega_0)u(n)] = \frac{\frac{z}{\beta}\left(\frac{z}{\beta} - \cos\omega_0\right)}{\left(\frac{z}{\beta}\right)^2 - 2\frac{z}{\beta}\cos\omega_0 + 1} = \frac{1 - \beta z^{-1}\cos\omega_0}{1 - 2\beta z^{-1}\cos\omega_0 + \beta^2 z^{-2}}$$

其收敛域为$\left|\frac{z}{\beta}\right| > 1$，即$|z| > |\beta|$。显然，该结果与式(8-15)完全一致。

（五）初值定理

若 $x(n)$是因果序列，已知

$$X(z) = \mathscr{Z}[x(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

则

$$x(0)=\lim_{z\to\infty}X(z) \tag{8-47}$$

证明

因为

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}=x(0)+x(1)z^{-1}+x(2)z^{-2}+\cdots$$

当 $z\to\infty$，在上式的级数中除了第一项 $x(0)$ 外，其他各项都趋近于零，所以

$$\lim_{z\to\infty}X(z)=\lim_{z\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}=x(0)$$

（六）终值定理

若 $x(n)$ 是因果序列，已知

$$X(z)=\mathscr{Z}[x(n)]=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

则

$$\lim_{n\to\infty}x(n)=\lim_{z\to 1}[(z-1)X(z)] \tag{8-48}$$

证明

因为

$$\begin{aligned}\mathscr{Z}[x(n+1)-x(n)]&=zX(z)-zx(0)-X(z)\\&=(z-1)X(z)-zx(0)\end{aligned}$$

取极限得

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 1}(z-1)X(z)&=x(0)+\lim_{z\to 1}\sum_{n=0}^{\infty}[x(n+1)-x(n)]z^{-n}\\&=x(0)+[x(1)-x(0)]+[x(2)-x(1)]+[x(3)-x(2)]+\cdots\\&=x(0)-x(0)+x(\infty)\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{z\to 1}(z-1)X(z)=x(\infty)$$

从推导中可以看出，终值定理只有当 $n\to\infty$ 时 $x(n)$ 收敛才可应用，也就是说要求 $X(z)$ 的极点必须处在单位圆内（在单位圆上只能位于 $z=+1$ 点且是一阶极点）。

以上两个定理的应用类似于拉氏变换，如果已知序列 $x(n)$ 的 z 变换 $X(z)$，在不求逆变换的情况下，可以利用这两个定理很方便地求出序列的初值 $x(0)$ 和终值 $x(\infty)$。

（七）时域卷积定理

已知两序列 $x(n)$，$h(n)$，其 z 变换为

$$X(z)=\mathscr{Z}[x(n)] \qquad (R_{x1}<|z|<R_{x2})$$

$$H(z)=\mathscr{Z}[h(n)] \qquad (R_{h1}<|z|<R_{h2})$$

则

$$\mathscr{Z}[x(n)*h(n)]=X(z)H(z) \tag{8-49}$$

在一般情况下，其收敛域是 $X(z)$ 与 $H(z)$ 收敛域的重叠部分，即 $\max(R_{x1},R_{h1})<|z|<\min(R_{x2},R_{h2})$。若位于某一 z 变换收敛域边缘上的极点被另一 z 变换的零点抵消，则收敛域将会扩大。

证明

因为

$$\begin{aligned}\mathscr{Z}[x(n)*h(n)]&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}[x(n)*h(n)]z^{-n}\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)z^{-n}\\&=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n-m)z^{-(n-m)}z^{-m}\\&=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)z^{-m}H(z)\end{aligned}$$

所以

$$\mathscr{Z}[x(n)*h(n)]=X(z)H(z)$$

或者写作

$$x(n)*h(n)=\mathscr{Z}^{-1}[X(z)H(z)] \tag{8-50}$$

可见两序列在时域中的卷积等效于在 z 域中两序列 z 变换的乘积。若 $x(n)$与 $h(n)$分别为线性时不变离散系统的激励序列和单位样值响应，那么在求系统的响应序列 $y(n)$时，可以避免卷积运算，而借助于式(8-50)通过 $X(z)H(z)$的逆变换求出 $y(n)$，在很多情况下这样会更方便些。

例 8-11 求下列两单边指数序列的卷积：

$$x(n)=a^n u(n)$$
$$h(n)=b^n u(n)$$

解

因为

$$X(z)=\frac{z}{z-a} \quad (|z|>|a|)$$

$$H(z)=\frac{z}{z-b} \quad (|z|>|b|)$$

由式(8-49)得

$$Y(z)=X(z)H(z)$$

$$=\frac{z^2}{(z-a)(z-b)}$$

显然,其收敛域为$|z|>|a|$与$|z|>|b|$的重叠部分,如图 8-8 所示。

把 $Y(z)$展成部分分式,得

$$Y(z)=\frac{1}{a-b}\left(\frac{az}{z-a}-\frac{bz}{z-b}\right)$$

其逆变换为

$$y(n)=x(n)*h(n)=\mathscr{Z}^{-1}[Y(z)]$$
$$=\frac{1}{a-b}(a^{n+1}-b^{n+1})u(n)$$

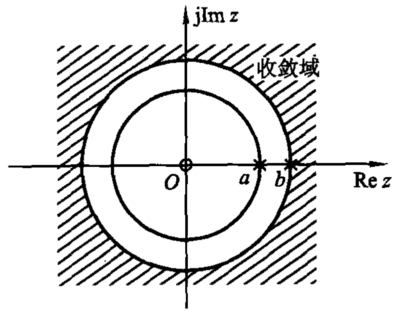


图 8-8 $a^nu(n)*b^nu(n)$的 z 变换收敛域

例 8-12 求下列两序列的卷积:

$$x(n)=u(n)$$
$$h(n)=a^nu(n)-a^{n-1}u(n-1)$$

解

已知

$$X(z)=\frac{z}{z-1}\qquad(|z|>1)$$

由位移性知

$$H(z)=\frac{z}{z-a}-\frac{z}{z-a}\cdot z^{-1}$$
$$=\frac{z-1}{z-a}\quad(|z|>|a|)$$

由式(8-49)得

$$Y(z)=X(z)H(z)$$
$$=\frac{z}{z-1}\cdot\frac{z-1}{z-a}=\frac{z}{z-a}\quad(|z|>|a|)$$

其逆变换为

$$y(n)=x(n)*h(n)$$
$$=\mathscr{Z}^{-1}[Y(z)]$$
$$=a^nu(n)$$

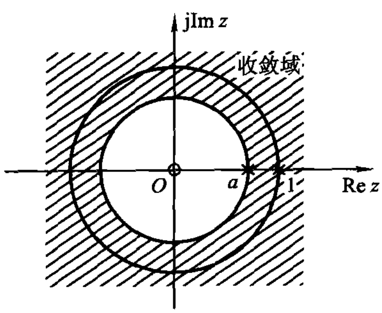


图 8-9 $[a^nu(n)-a^{n-1}u(n-1)]*u(n)$的 z 变换收敛域

显然,$X(z)$的极点($z=1$)被 $H(z)$的零点抵消,若$|a|<1$, $Y(z)$的收敛域比 $X(z)$与 $H(z)$的收敛域之重叠部分要大,如图 8-9 所示。

利用 z 变换的时域卷积定理容易计算解卷积(在 7.7 节用时域方法求解)。由卷积表达式对应的 z 域关系式 $Y(z)=X(z)H(z)$

可以看出，若已知 $Y(z)$，$H(z)$求 $X(z)$或已知 $Y(z)$，$X(z)$求$H(z)$，都可利用 z 变换式相除的方法解得，然后再取 $X(z)$或 $H(z)$之逆变换即可得到时域表达式 $x(n)$或 $h(n)$。虽然，从理论上讲这是一种比较方便的计算解卷积方法，然而在实际问题中却较少采用，这是因为当两个 z 变换式相除求得另一 z 变换式时，收敛域的分析将遇到麻烦。这时，处于分母的 z 变换式不能有位于单位圆之外的零点(即满足最小相移函数之要求)，否则，所得结果将出现单位圆外的极点，对应时域不能保证当 $n\to\infty$时函数收敛。习题 8－20 介绍了在实际中应用的另一种解卷积计算方法。

(八)序列相乘(z 域卷积定理)

已知两序列 $x(n)$，$h(n)$，其 z 变换为

$$\mathscr{Z}[x(n)]=X(z)\qquad(R_{x1}<|z|<R_{x2})$$

$$\mathscr{Z}[h(n)]=H(z)\qquad(R_{h1}<|z|<R_{h2})$$

则

$$\mathscr{Z}[x(n)h(n)]=\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_{C_1}X\left(\frac{z}{v}\right)H(v)v^{-1}\mathrm{d}v \tag{8-51}$$

或

$$\mathscr{Z}[x(n)h(n)]=\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_{C_2}X(v)H\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1}\mathrm{d}v \tag{8-52}$$

式中 C_1，C_2 分别为 $X\left(\frac{z}{v}\right)$与$H(v)$或 $X(v)$与 $H\left(\frac{z}{v}\right)$收敛域重叠部分内逆时针旋转的围线。而 $\mathscr{Z}[x(n)h(n)]$的收敛域一般为 $X(v)$与 $H\left(\frac{z}{v}\right)$或$H(v)$与 $X\left(\frac{z}{v}\right)$的重叠部分，即

$$R_{x1}R_{h1}<|z|<R_{x2}R_{h2}$$

证明

$$\begin{aligned}\mathscr{Z}[x(n)h(n)]&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}[x(n)h(n)]z^{-n}\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_{C_2}X(z)z^{n-1}\mathrm{d}z\right]h(n)z^{-n}\\&=\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\oint_{C_2}X(v)v^{n}\frac{\mathrm{d}v}{v}\right]h(n)z^{-n}\\&=\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_{C_2}\left[X(v)\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)\left(\frac{z}{v}\right)^{-n}\right]\frac{\mathrm{d}v}{v}\\&=\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_{C_2}X(v)H\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1}\mathrm{d}v\end{aligned}$$

同样可以证明式(8－51)。

从前面证明过程可以看出，$X(v)$的收敛域与 $X(z)$相同，$H\left(\frac{z}{v}\right)$的收敛域与$H(z)$相同，即

$$R_{x1}<|v|<R_{x2}$$

$$R_{h1}<\left|\frac{z}{v}\right|<R_{h2}$$

合并该两式，得到$\mathscr{Z}[x(n)h(n)]$的收敛域，它至少为

$$R_{x1}R_{h1}<|z|<R_{x2}R_{h2}$$

为了看出式(8-52)类似于卷积，假设围线是一个圆，圆心在原点，即令

$$v=\rho e^{j\theta}$$

$$z=re^{j\varphi}$$

代入式(8-52)，得到

$$\begin{aligned}\mathscr{Z}[x(n)h(n)]&=\frac{1}{2\pi j}\oint_{C_2}X(\rho e^{j\theta})H\left(\frac{re^{j\varphi}}{\rho e^{j\theta}}\right)\frac{d(\rho e^{j\theta})}{\rho e^{j\theta}}\\&=\frac{1}{2\pi}\oint_{C_2}X(\rho e^{j\theta})H\left[\frac{r}{\rho}e^{j(\varphi-\theta)}\right]d\theta\end{aligned}$$

由于 C_2 是圆，故 θ 的积分限为 $-\pi\sim+\pi$，这样上式变成

$$\mathscr{Z}[x(n)h(n)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(\rho e^{j\theta})H\left[\frac{r}{\rho}e^{j(\varphi-\theta)}\right]d\theta \qquad (8-53)$$

所以可以把它看作以 θ 为变量的$X(\rho e^{j\theta})$与 $H(\rho e^{j\theta})$之卷积。

在应用 z 域卷积公式(8-51)和式(8-52)时，通常可以利用留数定理，这时应当注意围线 C 在收敛域内的正确选择。

例 8-13 利用 z 域卷积定理求$na^nu(n)$序列的 z 变换$(0<a<1)$。

解 若已知

$$X(z)=\mathscr{Z}[nu(n)]=\frac{z}{(z-1)^2} \quad (|z|>1)$$

$$H(z)=\mathscr{Z}[a^nu(n)]=\frac{z}{z-a} \quad (|z|>|a|)$$

那么由 z 域卷积定理知

$$\begin{aligned}\mathscr{Z}[na^nu(n)]&=\frac{1}{2\pi j}\oint_C X(v)H\left(\frac{z}{v}\right)\frac{dv}{v}\\&=\frac{1}{2\pi j}\oint_C\frac{v}{(v-1)^2}\cdot\frac{\left(\frac{z}{v}\right)}{\left(\frac{z}{v}-a\right)}\cdot\frac{dv}{v}\\&=\frac{1}{2\pi j}\oint_C\frac{z}{(v-1)^2(z-av)}dv\end{aligned}$$

其收敛域为$|v|>1$ 与$\left|\frac{z}{v}\right|>a$ 的重叠区域，即要求 $1<|v|<\left|\frac{z}{a}\right|$。因为$|z|$

>1，$|a|<1$，所以围线 C 只包围一个二阶极点 $v=1$，如图 8－10 所示。

这样

$$\mathscr{Z}[na^n u(n)]=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\oint_C \frac{z}{(v-1)^2(z-av)}\mathrm{d}v$$
$$=\mathrm{Res}\left[\frac{z}{(v-1)^2(z-av)}\right]_{v=1}$$
$$=\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\left(\frac{z}{z-av}\right)\right]_{v=1}$$
$$=\frac{az}{(z-a)^2}\qquad(|z|>|a|)$$

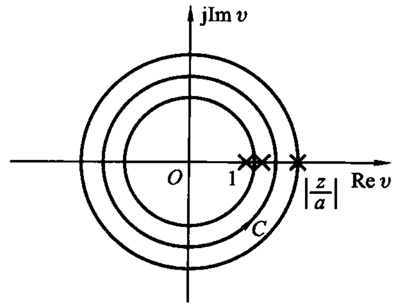


图 8－10　$\dfrac{z}{(v-1)^2(z-av)}$ 在 v 平面上的零极点分布

其结果与式(8－11)完全一致。

z 变换的一些主要性质(定理)列于表8－5。

表 8－5　z 变换的主要性质(定理)

序号	序列	z 变换	收敛域
1	$x(n)$	$X(z)$	$R_{x1}<\|z\|<R_{x2}$
	$h(n)$	$H(z)$	$R_{h1}<\|z\|<R_{h2}$
2	$ax(n)+bh(n)$	$aX(z)+bH(z)$	$\max(R_{x1},R_{h1})<\|z\|<\min(R_{x2},R_{h2})$
3	$\mathrm{Re}[x(n)]$	$\frac{1}{2}[X(z)+X^*(z^*)]$	$R_{x1}<\|z\|<R_{x2}$
4	$\mathrm{Im}[x(n)]$	$\frac{1}{2\mathrm{j}}[X(z)-X^*(z^*)]$	$R_{x1}<\|z\|<R_{x2}$
5	$x^*(n)$	$X^*(z^*)$	$R_{x1}<\|z\|<R_{x2}$
6	$x(-n)$	$X(z^{-1})$	$R_{x1}<\|z^{-1}\|<R_{x2}$
7	$a^n x(n)$	$X(a^{-1}z)$	$\|a\|R_{x1}<\|z\|<\|a\|R_{x2}$
8	$(-1)^n x(n)$	$X(-z)$	$R_{x1}<\|z\|<R_{x2}$
9	$nx(n)$	$-z\frac{\mathrm{d}X(z)}{\mathrm{d}z}$	$R_{x1}<\|z\|<R_{x2}$
10	$x(n-m)$	$z^{-m}X(z)$	$R_{x1}<\|z\|<R_{x2}$
11	$x(n)*h(n)$	$X(z)\cdot H(z)$	$\max(R_{x1},R_{h1})<\|z\|<\min(R_{x2},R_{h2})$
12	$x(n)\cdot h(n)$	$\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\oint_C X(v)H\left(\frac{z}{v}\right)\frac{\mathrm{d}v}{v}$	$R_{x1}\cdot R_{h1}<\|z\|<R_{x2}\cdot R_{h2}$
13	$\sum_{k=0}^{n}x(k)$	$\frac{z}{z-1}X(z)$	
14	$\frac{1}{n+a}x(n)$	$-z^a\int_0^z \frac{X(v)}{v^{a+1}}\mathrm{d}v$	
15	$\frac{1}{n}x(n)$	$-\int_0^z X(v)v^{-1}\mathrm{d}v$	
16	$x(0)=\lim_{z\to\infty}X(z)$		$x(n)$为因果序列　$\|z\|>R_{x1}$
17	$x(\infty)=\lim_{z\to1}(z-1)X(z)$		$x(n)$为因果序列，且当$\|z\|\geq1$时$(z-1)X(z)$收敛

8.6 z 变换与拉普拉斯变换的关系

至此本书已经讨论了三种变换域方法，即傅里叶变换、拉普拉斯变换和 z 变换。这些变换并不是孤立的，它们之间有着密切的联系，在一定条件下可以互相转换。在第四章讨论过拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系，现在研究 z 变换与拉普拉斯变换的关系。

(一) z 平面与 s 平面的映射关系

本章 8.1 节已经给出了复变量 z 与 s 有下列关系：

$$z = e^{sT} \tag{8-54}$$

或

$$s = \frac{1}{T}\ln z$$

式中 T 是序列的时间间隔，重复频率 $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$。

为了说明 $s \sim z$ 的映射关系，将 s 表示成直角坐标形式，而把 z 表示成极坐标形式，即

$$s = \sigma + j\omega \tag{8-55}$$

$$z = re^{j\theta}$$

将式(8-55)代入式(8-54)

$$re^{j\theta} = e^{(\sigma + j\omega)T}$$

于是，得到

$$r = e^{\sigma T} = e^{\frac{2\pi\sigma}{\omega_s}} \tag{8-56}$$

$$\theta = \omega T = 2\pi\frac{\omega}{\omega_s}$$

上式表明 $s \sim z$ 平面有如下的映射关系：

(1) s 平面上的虚轴($\sigma = 0, s = j\omega$)映射到 z 平面是单位圆，其右半平面映射到 z 平面是单位圆的圆外，而左半平面映射到 z 平面是单位圆的圆内。

(2) s 平面的实轴($\omega = 0, s = \sigma$)映射到 z 平面是正实轴，平行于实轴的直线(ω 为常数)映射到 z 平面是始于原点的辐射线，通过 $j\frac{k\omega_s}{2}(k = \pm 1, \pm 3, \cdots)$而平行于实轴的直线映射到 z 平面是负实轴。

$s \sim z$ 平面的映射关系如表 8-6 所示。

(3) 由于$e^{j\theta}$是以 ω_s 为周期的周期函数，因此在 s 平面上沿虚轴移动对应于 z 平面上沿单位圆周期性旋转，每平移 ω_s，则沿单位圆转一圈。所以 $z \sim s$ 映射并不是单值的。

表 8－6　z 平面与 s 平面的映射关系

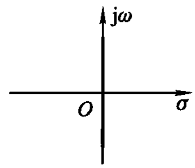
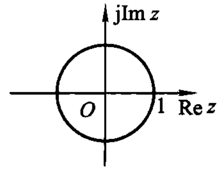
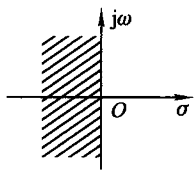
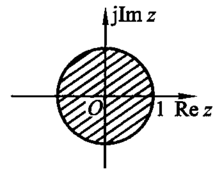
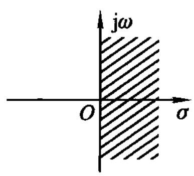
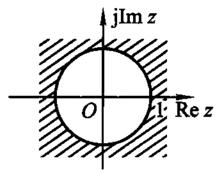
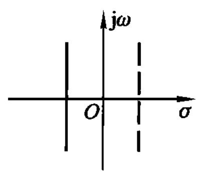
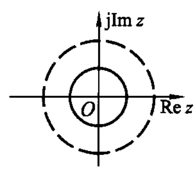
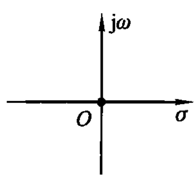
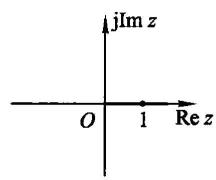
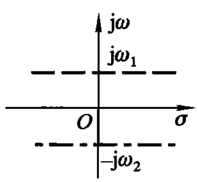
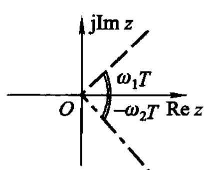
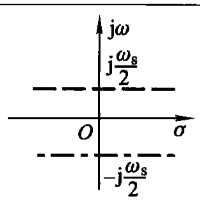
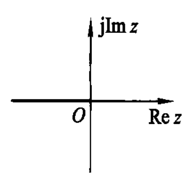
s 平面($s=\sigma+\mathrm{j}\omega$)		z 平面($z=re^{\mathrm{j}\theta}$)	
虚轴 ($\sigma=0$, $s=\mathrm{j}\omega$)			单位圆 ($r=1$, θ 任意)
左半平面 ($\sigma<0$)			单位圆内 ($r<1$, θ 任意)
右半平面 ($\sigma>0$)			单位圆外 ($r>1$, θ 任意)
平行于虚轴的直线 (σ 为常数)			圆 ($\sigma>0, r>1$; $\sigma<0, r<1$)
实轴 ($\omega=0$, $s=\sigma$)			正实轴 ($\theta=0$, r 任意)
平行于实轴的直线 (ω 为常数)			始于原点的辐射线 (θ 为常数, r 任意)
通过 $\pm\mathrm{j}\dfrac{k\omega_s}{2}$ 平行于实轴的直线 ($k=1,3,\cdots$)			负实轴 ($\theta=\pi$, r 任意)

图 8-11(a)~(e)说明上述映射关系。

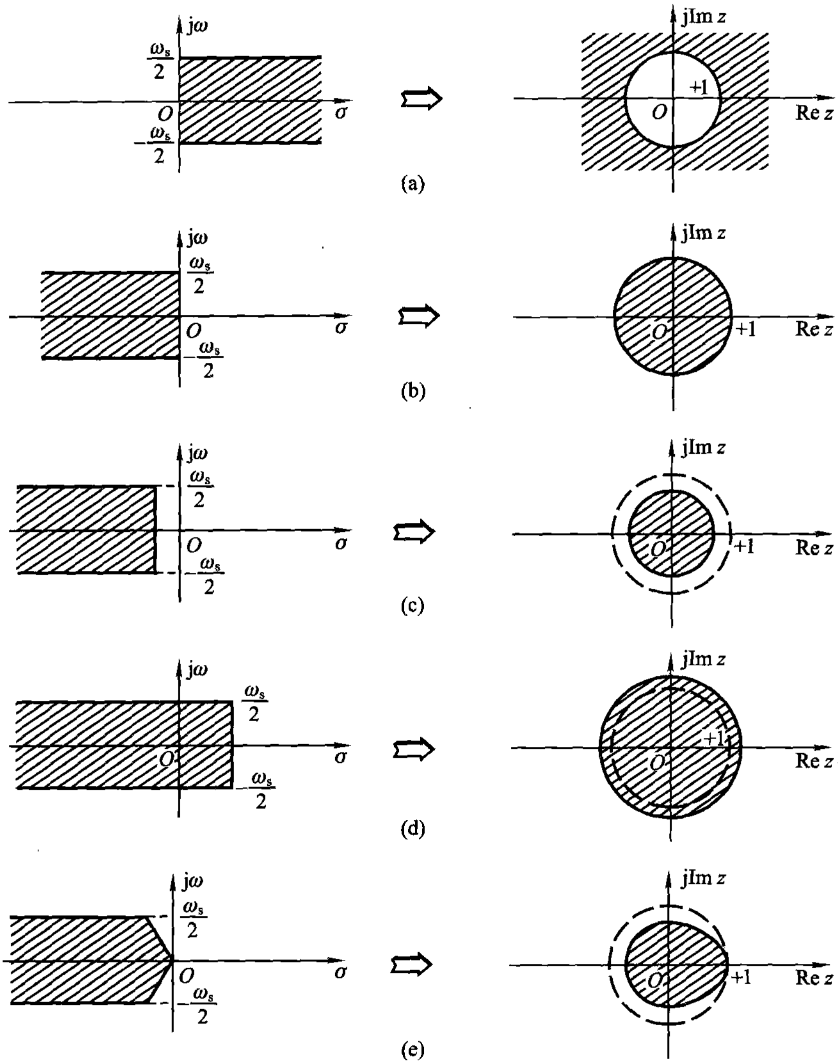


图 8-11 z 平面与 s 平面的映射关系举例

在连续时间系统分析中,我们熟知利用系统函数 s 域零、极点分布特性研究系统性能的方法。掌握了上述 s 平面与 z 平面映射规律之后,容易利用类似的方法研究离散时间系统函数 z 平面特性与系统时域特性、频响特性以及稳定性的关系,这将是后面 8.8 节和 8.10 节的研究主题。

(二) z 变换与拉氏变换表达式之对应

若连续时间信号 $x(t)$经均匀抽样构成序列 $x(n)$,且已知 $\mathscr{L}[x(t)]=$

$X(s)$，下面讨论能否借助 $X(s)$ 写出 $\mathscr{Z}[x(n)]=X(z)$。[注意此处 $X(s)$ 和 $X(z)$ 分别表示 $x(t)$ 和 $x(n)$ 的拉氏变换与 z 变换的表达式，严格讲，函数符号 X 应采用不同的字母，考虑到已熟悉的符号，都用 X 表示，但函数形式不同。]

在以下分析中，必须注意，对于连续时间信号的突变点函数值与对应的序列样值有所区别。例如，阶跃信号 $u(t)$ 在 $t=0$ 点定义为 $\frac{1}{2}$，而阶跃序列 $u(n)$ 在 $n=0$ 点定义为 1。

若连续时间信号 $\hat{x}(t)$ 由 N 项指数信号相加组合而成

$$\begin{aligned}\hat{x}(t)&=\hat{x}_1(t)+\hat{x}_2(t)+\cdots+\hat{x}_N(t)\\&=\sum_{i=1}^{N}\hat{x}_i(t)=\sum_{i=1}^{N}A_i e^{p_i t}u(t)\end{aligned}\tag{8-57}$$

容易求得，它的拉氏变换为

$$\mathscr{L}[\hat{x}(t)]=\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i}{s-p_i}\tag{8-58}$$

若序列 $x(nT)$ 由 N 项指数序列相加组合而成

$$\begin{aligned}x(nT)&=x_1(nT)+x_2(nT)+\cdots+x_N(nT)\\&=\sum_{i=1}^{N}x_i(nT)=\sum_{i=1}^{N}A_i e^{p_i nT}u(nT)\end{aligned}\tag{8-59}$$

它的 z 变换为

$$\mathscr{Z}[x(nT)]=\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i}{1-e^{p_i T}z^{-1}}\tag{8-60}$$

从式(8-57)与式(8-59)容易想到，$x(nT)$ 的样值等于 $\hat{x}(t)$ 在 $t=nT$ 各点之抽样值。然而在 $t=0$(即 $n=0$)点违反了这一规律。出现这一现象的原因是在此点波形发生跳变。具体讲对于式(8-57)和式(8-59)中各项，也即任意 i 值有

$$\hat{x}_i(t)=\begin{cases}0, & (t<0)\\ \dfrac{A_i}{2}, & (t=0)\\ A_i e^{p_i t}, & (t>0)\end{cases}\tag{8-61}$$

$$x_i(nT)=\begin{cases}0, & (n<0)\\ A_i, & (n=0)\\ A_i e^{p_i nT}, & (n>0)\end{cases}\tag{8-62}$$

可以看出，按抽样规律建立二者联系时必须在 0 点补足 $A_i/2$，即

$$x_i(nT)u(n)=\begin{cases}\hat{x}_i(t)u(t)|_{t=nT} & (\text{当 } n\neq 0)\\ \hat{x}_i(t)u(t)|_{t=nT}+\dfrac{A_i}{2} & (\text{当 } n=0)\end{cases} \tag{8-63}$$

在满足式(8-63)要求的条件下，可以建立 $\mathscr{L}[\hat{x}(t)]$ 与 $\mathscr{Z}[x(nT)]$ 的对应关系，当已知式(8-58)时，引用 A_i、p_i 填入式(8-60)即可求得 $x(nT)$ 之 z 变换，下面给出实例。

例 8-14 已知指数函数 $e^{-at}u(t)$ 的拉氏变换为 $\dfrac{1}{s+a}$，求抽样序列 $e^{-anT}u(nT)$ 的 z 变换。

解 已知

$$x(t)=e^{-at}u(t)$$

$$X(s)=\frac{1}{s+a}$$

$X(s)$ 只有一个一阶极点 $s=-a$，这样由式(8-60)可以直接求出 $e^{-anT}u(nT)$ 的 z 变换为

$$X(z)=\frac{1}{1-z^{-1}e^{-aT}}$$

例 8-15 已知正弦信号 $\sin(\omega_0 t)u(t)$ 的拉氏变换为 $\dfrac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$，求抽样序列 $\sin(\omega_0 nT)u(nT)$ 的 z 变换。

解 已知

$$x(t)=\sin(\omega_0 t)u(t)$$

$$X(s)=\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$$

显然 $X(s)$ 的极点位于 $s_1=j\omega_0$，$s_2=-j\omega_0$，其留数分别为 $A_1=\dfrac{-j}{2}$ 及 $A_2=\dfrac{j}{2}$。于是，$X(s)$ 可以展成部分分式

$$X(s)=\frac{-\dfrac{j}{2}}{s-j\omega_0}+\frac{\dfrac{j}{2}}{s+j\omega_0}$$

由式(8-60)可以得到 $\sin(\omega_0 nT)u(nT)$ 的 z 变换为

$$X(z)=\frac{-\dfrac{j}{2}}{1-z^{-1}e^{j\omega_0 T}}+\frac{\dfrac{j}{2}}{1-z^{-1}e^{-j\omega_0 T}}$$

$$=\frac{z^{-1}\sin(\omega_0 T)}{1-2z^{-1}\cos(\omega_0 T)+z^{-2}}$$

显然,上两例的结果与按定义求得的结果完全一致。

由于查表求 z 变换也很方便,因此求简单的 z 变换时,掌握这种对应规律并未显示明显优点。在第十章 10.6 节将要看到这种对应规律在借助模拟滤波器原理设计数字滤波器时会有用处。

表 8-7 列出了常用连续信号的拉氏变换 $X(s)$ 与抽样序列 z 变换的对应关系。

表 8-7　常用信号的拉氏变换与 z 变换

	$X(s)$	$x(t)$	$x(nT)$	$X(z)$
1	1	$\delta(t)$	$\delta(nT)$	1
2	$\frac{1}{s}$	$u(t)$	$u(nT)$	$\frac{z}{z-1}$
3	$\frac{1}{s^2}$	t	nT	$\frac{zT}{(z-1)^2}$
4	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	e^{-anT}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
5	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$(nT)^2$	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$
6	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	$\sin(\omega_0 t)$	$\sin(n\omega_0 T)$	$\frac{z\sin(\omega_0 T)}{z^2-2z\cos(\omega_0 T)+1}$
7	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$	$\cos(\omega_0 t)$	$\cos(n\omega_0 T)$	$\frac{z[z-\cos(\omega_0 T)]}{z^2-2z\cos(\omega_0 T)+1}$
8	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	nTe^{-anT}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
9	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}$	$e^{-at}\sin(\omega_0 t)$	$e^{-anT}\sin(n\omega_0 T)$	$\frac{ze^{-aT}\sin(\omega_0 T)}{z^2-2ze^{-aT}\cos(\omega_0 T)+e^{-2aT}}$
10	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}$	$e^{-at}\cos(\omega_0 t)$	$e^{-anT}\cos(n\omega_0 T)$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos(\omega_0 T)}{z^2-2ze^{-aT}\cos(\omega_0 T)+e^{-2aT}}$

8.7　利用 z 变换解差分方程

在 8.5 节例 8-8 已经给出利用 z 变换解差分方程的简单实例,本节给出一般规律。这种方法的原理是基于 z 变换的线性和位移性,把差分方程转化为代数方程,从而使求解过程简化。

线性时不变离散系统的差分方程一般形式是

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r) \tag{8-64}$$

将等式两边取单边 z 变换,并利用 z 变换的位移公式(8-37)可以得到

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}\left[Y(z)+\sum_{l=-k}^{-1} y(l) z^{-l}\right] = \sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}\left[X(z)+\sum_{m=-r}^{-1} x(m) z^{-m}\right] \tag{8-65}$$

若激励 $x(n)=0$,即系统处于零输入状态,此时差分方程(8-64)成为齐次方程

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k)=0$$

而式(8-65)变成

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}\left[Y(z)+\sum_{l=-k}^{-1} y(l) z^{-l}\right]=0$$

于是

$$Y(z)=\frac{-\sum_{k=0}^{N}\left[a_k z^{-k}\cdot \sum_{l=-k}^{-1} y(l) z^{-l}\right]}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} \tag{8-66}$$

对应的响应序列是上式的逆变换,即

$$y(n)=\mathscr{Z}^{-1}[Y(z)]$$

显然它是零输入响应,该响应由系统的起始状态 $y(l)(-N\leqslant l\leqslant -1)$而产生的。

若系统的起始状态 $y(l)=0(-N\leqslant l\leqslant -1)$,即系统处于零起始状态,此时式(8-65)变成

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y(z)=\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}\left[X(z)+\sum_{m=-r}^{-1} x(m) z^{-m}\right]$$

如果激励 $x(n)$为因果序列,上式可以写成

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y(z)=\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r} X(z)$$

于是

$$Y(z)=X(z)\cdot\frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

令

$$H(z)=\frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} \tag{8-67}$$

则

$$Y(z)=X(z)H(z)$$

此时对应的序列为

$$y(n)=\mathscr{Z}^{-1}[X(z)H(z)]$$

这样所得到的响应是系统的零状态响应，它完全是由激励 $x(n)$产生的。这里所引入的 z 变换式 $H(z)$是由系统的特性所决定，它就是下节将要讨论的离散系统的“系统函数”。综合上述两种情况，可以看出，离散系统的总响应等于零输入响应与零状态响应之和。

例 8－16　一离散系统的差分方程为

$$y(n)-by(n-1)=x(n)$$

若激励 $x(n)=a^n u(n)$，起始值 $y(-1)=0$，求响应 $y(n)$。

解　对差分方程两边取单边 z 变换，由位移公式(8－37)得到

$$Y(z)-bz^{-1}Y(z)-by(-1)=X(z)$$

因为 $y(-1)=0$，所以

$$Y(z)-bz^{-1}Y(z)=X(z)$$

$$Y(z)=\frac{X(z)}{1-bz^{-1}}$$

已知 $x(n)=a^n u(n)$的 z 变换为

$$X(z)=\frac{z}{z-a}\quad(|z|>|a|)$$

于是

$$Y(z)=\frac{z^2}{(z-a)(z-b)}$$

其极点位于 $z=a$，及 $z=b$。由式(8－31)可以将上式展成部分分式

$$Y(z)=\frac{1}{a-b}\left(\frac{az}{z-a}-\frac{bz}{z-b}\right)$$

进行逆变换，得到响应

$$y(n)=\frac{1}{a-b}(a^{n+1}-b^{n+1})u(n)$$

由于该系统处于零状态，所以系统的完全响应就是零状态响应。

例 8－17　对于上例的差分方程，若激励不变，但起始值不等于零，而是 $y(-1)=2$，求系统的响应 $y(n)$。

解　因为差分方程的 z 变换为

$$Y(z)-bz^{-1}Y(z)-by(-1)=X(z)$$

所以

$$Y(z)=\frac{X(z)+by(-1)}{1-bz^{-1}}$$

$$=\frac{X(z)}{1-bz^{-1}}+\frac{by(-1)}{1-bz^{-1}}$$

已知 $X(z)=\frac{z}{z-a}$，$y(-1)=2$，这样

$$Y(z)=\frac{z^2}{(z-a)(z-b)}+\frac{2bz}{z-b}$$

展成部分分式

$$Y(z)=\frac{a}{a-b}\frac{z}{z-a}-\frac{b}{a-b}\frac{z}{z-b}+\frac{2bz}{z-b}$$

进行逆变换，得到系统响应

$$y(n)=\frac{1}{a-b}(a^{n+1}-b^{n+1})+2b^{n+1}\qquad(n\geqslant 0)$$

8.8 离散系统的系统函数

(一)单位样值响应与系统函数

一个线性时不变离散系统在时域中可以用线性常系数差分方程来描述。上节中式(8-64)已经给出了这种差分方程的一般形式为

$$\sum_{k=0}^{N}a_k y(n-k)=\sum_{r=0}^{M}b_r x(n-r)$$

若激励 $x(n)$是因果序列，且系统处于零状态，此时，由上式的 z 变换得到

$$Y(z)\cdot\sum_{k=0}^{N}a_k z^{-k}=X(z)\cdot\sum_{r=0}^{M}b_r z^{-r}$$

于是

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{r=0}^{M}b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^{N}a_k z^{-k}}\tag{8-68}$$

$$Y(z)=H(z)X(z)$$

$H(z)$称为离散系统的系统函数，它表示系统的零状态响应与激励的 z 变换之比值。

式(8-68)的分子与分母多项式经因式分解可以改写为

$$H(z)=G\frac{\prod_{r=1}^{M}(1-z_r z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1-p_k z^{-1})}\tag{8-69}$$

其中 z_r 是$H(z)$的零点，p_k 是$H(z)$的极点，它们由差分方程的系数 a_k 与 b_r

决定。

由第七章已经知道，系统的零状态响应也可以用激励与单位样值响应的卷积表示，即

$$y(n)=x(n)*h(n)$$

由时域卷积定理，得到

$$Y(z)=X(z)H(z)$$

或

$$y(n)=\mathscr{Z}^{-1}[X(z)H(z)]$$

其中

$$H(z)=\mathscr{Z}[h(n)]=\sum_{n=0}^{\infty}h(n)z^{-n} \tag{8-70}$$

可见，系统函数 $H(z)$ 与单位样值响应 $h(n)$ 是一对 z 变换。我们既可以利用卷积求系统的零状态响应，又可以借助系统函数与激励变换式乘积之逆 z 变换求此响应。

例 8-18 求下列差分方程所描述的离散系统的系统函数和单位样值响应：

$$y(n)-ay(n-1)=bx(n)$$

解

将差分方程两边取 z 变换，并利用位移特性，得到

$$Y(z)-az^{-1}Y(z)-ay(-1)=bX(z)$$

$$Y(z)(1-az^{-1})=bX(z)+ay(-1) \tag{8-71}$$

如果系统处于零状态，即 $y(-1)=0$，则由式(8-71)可得

$$H(z)=\frac{b}{1-az^{-1}}=\frac{bz}{z-a}$$

$$h(n)=ba^{n}u(n)$$

(二)系统函数的零极点分布对系统特性的影响

(1)由系统函数的零极点分布确定单位样值响应

与拉氏变换在连续系统中的作用类似，在离散系统中，z 变换建立了时间函数 $x(n)$ 与 z 域函数 $X(z)$ 之间一定的转换关系。因此，可以从 z 变换函数 $X(z)$ 的形式反映出时间函数 $x(n)$ 的内在性质。对于一个离散系统来说，如果它的系统函数 $H(z)$ 是有理函数，那么分子多项式和分母多项式都可分解为因子形式，它们的因子分别表示 $H(z)$ 的零点和极点的位置，如式(8-69)所示，即

$$H(z)=\frac{\sum_{r=0}^{M}b_rz^{-r}}{\sum_{k=0}^{N}a_kz^{-k}}=G\frac{\prod_{r=1}^{M}(1-z_rz^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1-p_kz^{-1})}$$

由于系统函数 $H(z)$与单位样值响应 $h(n)$是一对 z 变换

$$H(z)=\mathscr{Z}[h(n)] \tag{8-72}$$

$$h(n)=\mathscr{Z}^{-1}[H(z)] \tag{8-73}$$

所以,完全可以从 $H(z)$的零极点的分布情况,确定单位样值响应 $h(n)$的性质。

如果把 $H(z)$展成部分分式,那么 $H(z)$每个极点将决定一项对应的时间序列。对于具有一阶极点 $p_1,p_2,\cdots,p_N$ 的系统函数,若 $N>M$ 则$h(n)$可表示为

$$\begin{aligned} h(n)&=\mathscr{Z}^{-1}[H(z)]\\ &=\mathscr{Z}^{-1}\left[G\frac{\prod_{r=1}^{M}(1-z_rz^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1-p_kz^{-1})}\right]\\ &=\mathscr{Z}^{-1}\left[\sum_{k=0}^{N}\frac{A_kz}{z-p_k}\right] \end{aligned} \tag{8-74}$$

式中 $p_0=0$。这样,上式可表示成

$$\begin{aligned} h(n)&=\mathscr{Z}^{-1}\left[A_0+\sum_{k=1}^{N}\frac{A_kz}{z-p_k}\right]\\ &=A_0\delta(n)+\sum_{k=1}^{N}A_k(p_k)^nu(n) \end{aligned} \tag{8-75}$$

这里,极点 p_k 可以是实数,但一般情况下,它是以成对的共轭复数形式出现。由上式可见,单位样值响应 $h(n)$的特性取决于 $H(z)$的极点,其幅值由系数 A_k 决定,而 A_k 与 $H(z)$的零点分布有关。与拉氏变换类似,$H(z)$的极点决定 $h(n)$的波形特征,而零点只影响 $h(n)$的幅度与相位。

在 8.6 节已经讨论了 z 变换与拉氏变换之间的联系,因此,在这里完全可以借助 $z\sim s$ 平面的映射关系,将 s 域零极点分析的结论直接用于 z 域分析之中。

利用已知的 $z\sim s$ 平面映射关系

$$z=e^{sT}$$

$$z=re^{j\theta}$$

$$s=\sigma+j\omega$$

$$r=e^{\sigma T}$$

$$\theta=\omega T$$

这样,表 4-4、表 4-5 所表示的 $H(s)$的极点分布与 $h(t)$形状的关系,可以直接对应为 $H(z)$的极点分布与 $h(n)$形状的关系。对于一阶极点的情况,这种关系示意于图 8-12。图中×表示 $H(z)$的一阶单极点或共轭极点的位置。

(2)离散时间系统的稳定性和因果性

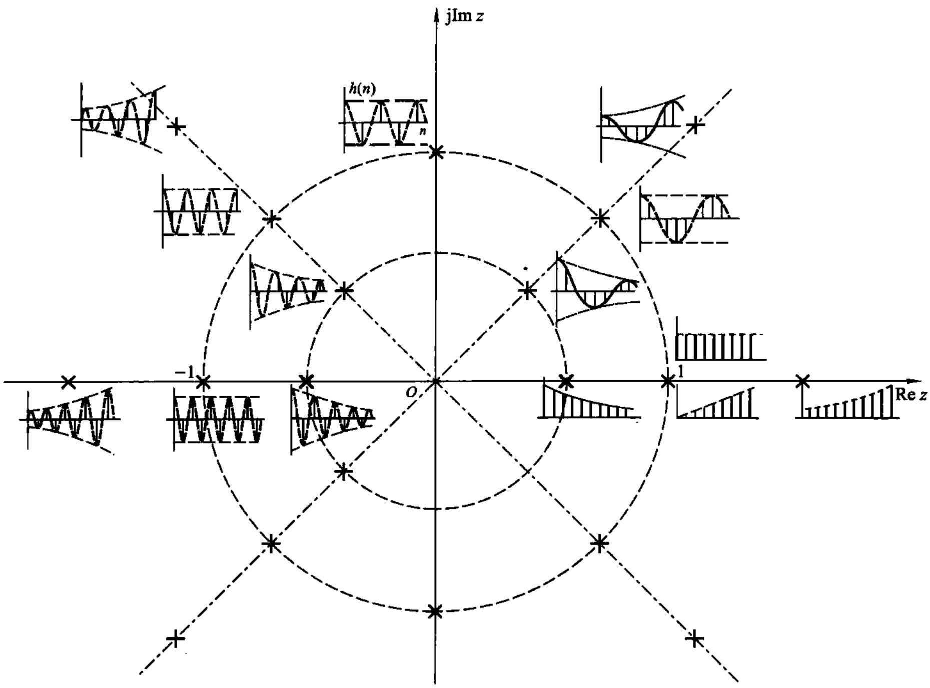


图 8-12　H(z)的极点位置与 h(n)形状的关系

在第七章 7.5 节已从时域特性研究了离散时间系统的稳定性和因果性，现在从 z 域特征考察系统的稳定与因果特性。

离散时间系统稳定的充分必要条件是单位样值响应 h(n)绝对可和，即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| \leqslant M \tag{8-76}$$

式中 M 为有限正值，式(8-76)也可写作

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty \tag{8-77}$$

由 z 变换定义和系统函数定义可知

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n} \tag{8-78}$$

当 z=1(在 z 平面单位圆上)

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) \tag{8-79}$$

为使系统稳定应满足

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) < \infty \tag{8-80}$$

这表明，对于稳定系统 $H(z)$的收敛域应包含单位圆在内。

对于因果系统，$h(n)=h(n)u(n)$为因果序列，它的 z 变换之收敛域包含∞点，通常收敛域表示为某圆外区 $a<|z|\leqslant\infty$。

在实际问题中经常遇到的稳定因果系统应同时满足以上两方面的条件，也即

$$\begin{cases} a<|z|\leqslant\infty \\ a<1 \end{cases} \tag{8-81}$$

这时，全部极点落在单位圆内。

例 8-19 表示某离散系统的差分方程为

$$y(n)+0.2y(n-1)-0.24y(n-2)=x(n)+x(n-1)$$

(1)求系统函数 $H(z)$；

(2)讨论此因果系统 $H(z)$的收敛域和稳定性；

(3)求单位样值响应 $h(n)$；

(4)当激励 $x(n)$为单位阶跃序列时，求零状态响应 $y(n)$。

解

(1)将差分方程两边取 z 变换，得

$$Y(z)+0.2z^{-1}Y(z)-0.24z^{-2}Y(z)=X(z)+z^{-1}X(z)$$

于是

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1+z^{-1}}{1+0.2z^{-1}-0.24z^{-2}}$$

也可写成

$$H(z)=\frac{z(z+1)}{(z-0.4)(z+0.6)}$$

(2) $H(z)$的两个极点分别位于 0.4 和 −0.6，它们都在单位圆内，对此因果系统之收敛域为$|z|>0.6$，且包含 $z=\infty$点，是一个稳定的因果系统。

(3)将$H(z)/z$ 展成部分分式，得到

$$H(z)=\frac{1.4z}{z-0.4}-\frac{0.4z}{z+0.6} \quad (|z|>0.6)$$

取逆变换，得到单位样值响应

$$h(n)=[1.4(0.4)^n-0.4(-0.6)^n]u(n)$$

(4)若激励

$$x(n)=u(n)$$

则

$$X(z)=\frac{z}{z-1} \quad (|z|>1)$$

于是

$$Y(z)=H(z)X(z)=\frac{z^2(z+1)}{(z-1)(z-0.4)(z+0.6)}$$

将 $Y(z)$展成部分分式，得到

$$Y(z)=\frac{2.08z}{z-1}-\frac{0.93z}{z-0.4}-\frac{0.15z}{z+0.6}\quad(|z|>1)$$

取逆变换后，得到 $y(n)$为

$$y(n)=[2.08-0.93(0.4)^n-0.15(-0.6)^n]u(n)$$

8.9 序列的傅里叶变换(DTFT)

(一)定义、收敛条件

与连续时间信号分析类似，对于离散时间信号的研究，傅里叶变换同样占有重要地位。本节讨论"序列的傅里叶变换"，给出定义和一些基本性质，为下节利用 $H(z)$研究离散系统频率响应特性做准备。在第九章将继续介绍有关离散时间信号傅里叶分析的其他重要问题。

可从 z 变换引出序列的傅里叶变换，也可直接给出定义。序列 $x(n)$的 z 变换为

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

$$x(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}dz$$

由 $s\sim z$ 平面的映射关系可知，s 平面上的虚轴($s=j\omega$)对应于 z 平面上的单位圆($|z|=1$ 或 $z=e^{j\omega}$)，如图 8-13 所示。这样，单位圆上的 z 变换就是序列的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$，即

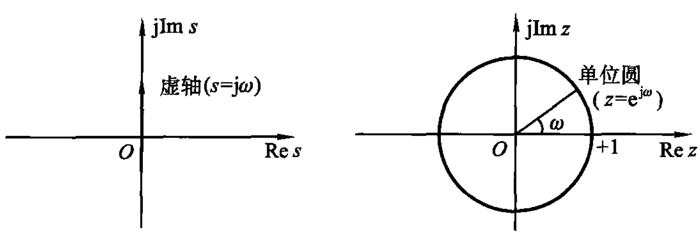


图 8-13 求频率响应时在 s，z 平面上取值轨迹

$$X(e^{j\omega})=X(z)|_{z=e^{j\omega}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-jn\omega}\qquad(8-82)$$

而逆变换

$$\begin{aligned}x(n)&=\frac{1}{2\pi j}\oint_{|z|=1}X(z)z^{n-1}dz\\&=\frac{1}{2\pi j}\oint_{|z|=1}X(e^{j\omega})e^{jn\omega}\cdot e^{-j\omega}d(e^{j\omega})\\&=\frac{1}{2\pi j}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{jn\omega}\cdot e^{-j\omega}je^{j\omega}d\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{jn\omega}d\omega\end{aligned} \tag{8-83}$$

序列的傅里叶变换也称为离散时间傅里叶变换(Discrete Time Fourier Transform,缩写为 DTFT),通常用以下符号分别表示对 $x(n)$ 取傅里叶正变换或逆变换:

$$\begin{aligned}\mathrm{DTFT}[x(n)]&=X(e^{j\omega})\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}\end{aligned} \tag{8-84}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{IDTFT}[X(e^{j\omega})]&=x(n)\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega\end{aligned} \tag{8-85}$$

必须指出,这里定义的离散时间傅里叶变换(即序列的傅里叶变换)不要与"离散傅里叶变换"相混淆,后一名词将在第九章给出定义。

$X(e^{j\omega})$是 ω 的复函数,可表示为

$$\begin{aligned}X(e^{j\omega})&=|X(e^{j\omega})|e^{j\varphi(\omega)}\\&=\mathrm{Re}[X(e^{j\omega})]+j\mathrm{Im}[X(e^{j\omega})]\end{aligned} \tag{8-86}$$

$X(e^{j\omega})$表示 $x(n)$的频域特性,也称为 $x(n)$的频谱,$|X(e^{j\omega})|$为幅度谱,$\varphi(\omega)$为相位谱,二者都是 ω 的连续函数。由于 $e^{j\omega}$是变量 ω 以 2π 为周期的周期性函数,因此 $X(e^{j\omega})$也是以 2π 为周期的周期函数。下面将要看到,$x(n)$的频谱都是周期性的,与第三章 3.10 节抽样信号的频谱相比较,二者特性是一致的。

例 8-20 若 $x(n)=R_5(n)=u(n)-u(n-5)$,求此序列的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$。

解

$$\begin{aligned}X(e^{j\omega})&=\mathrm{DTFT}[R_5(n)]\\&=\sum_{n=0}^{4}e^{-j\omega n}=\frac{1-e^{-j5\omega}}{1-e^{-j\omega}}=\frac{e^{-j\omega\frac{5}{2}}}{e^{-j\frac{\omega}{2}}}\left(\frac{e^{j\omega\frac{5}{2}}-e^{-j\omega\frac{5}{2}}}{e^{j\frac{\omega}{2}}-e^{-j\frac{\omega}{2}}}\right)\\&=e^{-j2\omega}\left[\frac{\sin\left(\frac{5}{2}\omega\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right]=|X(e^{j\omega})|e^{j\varphi(\omega)}\end{aligned}$$

其中，幅频特性

$$|X(e^{j\omega})| = \left|\frac{\sin\left(\frac{5}{2}\omega\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right|$$

而相频特性为

$$\varphi(\omega) = -2\omega + \arg\left[\frac{\sin\left(\frac{5}{2}\omega\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right]$$

式中 arg[·]表示方框号内表达式引入的相移，此处，其值在不同 ω 区间分别为 $0,\pi,2\pi,3\pi,4\pi,\cdots$。图 8-14 画出了 $R_5(n)$及其幅频特性和相频特性。

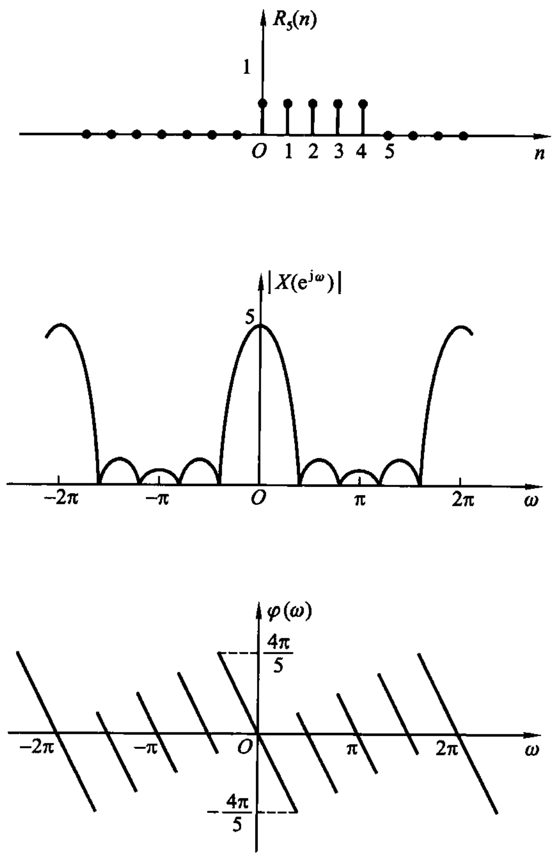


图 8-14　序列 $R_5(n)$的傅里叶变换

例 8-21　若离散时间系统的理想低通滤波器频率特性 $H(e^{j\omega})$如图8-15(a)所示，求它的傅里叶逆变换 $h(n)$(即单位样值响应)。

解

由式(8-85)求得

$$h(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}e^{j\omega n}d\omega$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)}{\pi n}$$

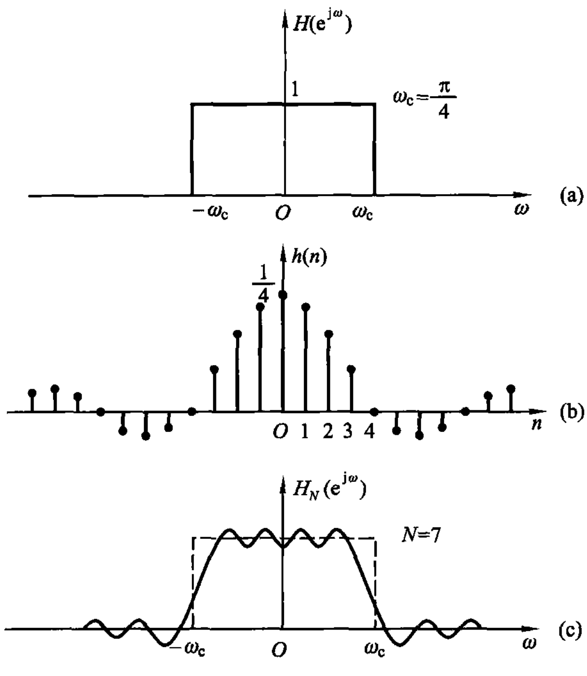


图 8-15　理想低通滤波器

图 8-15(b)示出 $h(n)$波形。取 $h(n)$有限项按正变换式(8-84)求和，例如 $N=7$(从 $-N$ 到 $+N$ 共 15 个样值)的结果 $H_N(e^{j\omega})$如图 8-15(c)所示，可以看到在 $\omega=\omega_c$ 不连续点处有上冲出现，也存在 Gibbs 现象。

前已述及，对于序列 $x(n)$而言，单位圆上的 z 变换 $X(z)|_{z=e^{j\omega}}$就是序列的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$，为此，要保证序列的 z 变换存在，$X(z)$的收敛域必须包含单位圆，此时有

$$|X(e^{j\omega})|=\left|\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}\right|\leqslant\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)||e^{-j\omega n}|$$

$$\leqslant \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty \tag{8-87}$$

这表明,若 $x(n)$ 绝对可和,则它的傅里叶变换存在。这时,级数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$ 一致收敛于 ω 的一个连续函数 $X(e^{j\omega})$。一致收敛意味着任给 $\varepsilon>0$,总能找到 N,使

$$\left| X(e^{j\omega}) - \sum_{n=-N}^{N} x(n)e^{-j\omega n} \right| < \varepsilon \tag{8-88}$$

式中 N 只与 ε 有关,与 $(-\pi,\pi)$ 区间内的 ω 值无关。

$x(n)$ 绝对可和只是傅里叶变换存在的充分条件。例 8-21 中 $h(n)$ 不满足绝对可和条件,然而它是平方可和的,即

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)|^2 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin(n\omega_c)}{\pi n} \right|^2 \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} |H(e^{j\omega})|^2 d\omega \\ &= \frac{\omega_c}{\pi} < \infty \end{aligned} \tag{8-89}$$

这表明,$h(n)$ 是能量受限的,级数

$$H_N(e^{j\omega}) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \left[\frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n} \right] e^{-j\omega n} \tag{8-90}$$

不能一致收敛于 $H(e^{j\omega})$,在不连续点 $\omega=\omega_c$ 处可以看到 Gibbs 现象。但是,由于 $h(n)$ 平方可和,式(8-90)按照均方误差为零的方式收敛于 $H(e^{j\omega})$,即

$$\lim_{N\to\infty} \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left| H(e^{j\omega}) - H_N(e^{j\omega}) \right|^2 d\omega \right] = 0 \tag{8-91}$$

以上讨论的均匀一致收敛和均方误差为零方式的收敛分别要求序列绝对可和或能量受限,当序列满足绝对可和条件时一定满足能量受限,而能量受限不能保证绝对可和。至此只讨论了序列傅里叶变换的充分条件,如同连续时间信号的傅里叶变换一样,序列傅里叶变换存在的充分必要条件至今尚未找到。

(二)基本性质

由于序列的傅里叶变换是 z 变换在单位圆上的取值,因而,它的基本性质与 z 变换的基本性质有许多相同之处,这里只给出结论,略去证明。

(1) 线性

若

$$\text{DTFT}[x_1(n)] = X_1(e^{j\omega})$$
$$\text{DTFT}[x_2(n)] = X_2(e^{j\omega})$$

则

$$\mathrm{DTFT}[ax_1(n)+bx_2(n)]=aX_1(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})+bX_2(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) \tag{8-92}$$

式中 a,b 为任意常数。

(2) 序列的位移

若

$$\mathrm{DTFT}[x(n)]=X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$$

则

$$\mathrm{DTFT}[x(n-n_0)]=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n_0}X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) \tag{8-93}$$

时域位移对应频域的相移。

(3) 频域的位移

若

$$\mathrm{DTFT}[x(n)]=X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$$

则

$$\mathrm{DTFT}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 n}x(n)]=X[\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega-\omega_0)}] \tag{8-94}$$

频域位移对应时域的调制。

(4) 序列的线性加权

若

$$\mathrm{DTFT}[x(n)]=X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$$

则

$$\mathrm{DTFT}[nx(n)]=\mathrm{j}[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})] \tag{8-95}$$

时域的线性加权对应频域微分。

(5) 序列的反褶

若

$$\mathrm{DTFT}[x(n)]=X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$$

则

$$\mathrm{DTFT}[x(-n)]=X(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}) \tag{8-96}$$

时域反褶对应频域也反褶。

(6) 奇偶虚实性

若 $x(n)$ 为实序列，$\mathrm{DTFT}[x(n)]=X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$，它的实部和虚部分别为 $\mathrm{Re}[X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})]$ 和 $\mathrm{Im}[X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})]$，也可写作模与辐角形式

$$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=|X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}$$

它们具有以下特性：

$$\mathrm{Re}[X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})]=\mathrm{Re}[X(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})] \tag{8-97}$$

$$\mathrm{Im}[X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})]=-\mathrm{Im}[X(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})] \tag{8-98}$$

$$|X(e^{j\omega})| = |X(e^{-j\omega})| \tag{8-99}$$

$$\varphi(\omega) = -\varphi(-\omega) \tag{8-100}$$

$$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega}) \tag{8-101}$$

这表明复函数 $X(e^{j\omega})$的实部为偶函数，虚部为奇函数；模为偶函数，辐角是奇函数。$X(e^{j\omega})$与 $X(e^{-j\omega})$共轭。

$x(n)$的偶分量 $x_e(n)$和奇分量 $x_o(n)$表示式分别为

$$x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x(-n)] \tag{8-102}$$

$$x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x(-n)] \tag{8-103}$$

它们的傅里叶变换分别为

$$\mathrm{DTFT}[x_e(n)] = \mathrm{Re}[X(e^{j\omega})] \tag{8-104}$$

$$\mathrm{DTFT}[x_o(n)] = \mathrm{j}\ \mathrm{Im}[X(e^{j\omega})] \tag{8-105}$$

以上特性与连续时间信号的情况一致。

(7) 时域卷积定理

若

$$\mathrm{DTFT}[x(n)] = X(e^{j\omega})$$

$$\mathrm{DTFT}[h(n)] = H(e^{j\omega})$$

则

$$\mathrm{DTFT}[x(n) * h(n)] = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) \tag{8-106}$$

时域卷积对应频域相乘。

(8) 频域卷积定理

若

$$X(e^{j\omega}) = \mathrm{DTFT}[x(n)]$$

$$H(e^{j\omega}) = \mathrm{DTFT}[h(n)]$$

则

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}[X(e^{j\omega}) * H(e^{j\omega})]\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})H[e^{j(\omega-\theta)}]\mathrm{d}\theta\\ &= \mathrm{DTFT}[x(n)h(n)]\end{aligned} \tag{8-107}$$

时域相乘对应频域卷积。

(9) 帕塞瓦尔定理

若

$$\mathrm{DTFT}[x(n)] = X(e^{j\omega})$$

则

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega \tag{8-108}$$

此定理也称为能量定理,序列的总能量等于其傅里叶变换模平方在一个周期内积分取平均,即时域总能量等于频域一周期内总能量。

本节介绍的“序列的傅里叶变换(DTFT)”将为下节研究离散系统频率特性做好准备。下一章将要介绍周期性序列的傅里叶级数和有限长序列的傅里叶变换,并引出“离散傅里叶变换(DFT)”的定义。必须注意,“序列的傅里叶变换(DTFT)”与“离散傅里叶变换(DFT)”具有完全不同的含义。由“离散傅里叶变换(DFT)”引出的“快速傅里叶变换(FFT)”是数字信号处理研究与应用中最有力的计算工具。

8.10 离散时间系统的频率响应

(一) 离散系统频率响应的意义

与连续系统中频率响应的地位和作用类似,在离散系统中经常需要对输入信号的频谱进行处理,因此,有必要研究离散系统在正弦序列作用下的稳态响应,并说明离散系统频率响应的意义。

对于稳定的因果离散系统,令单位样值响应为 $h(n)$,系统函数为$H(z)$。如果输入是正弦序列

$$x(n) = A\sin(n\omega) \quad (n \geqslant 0)$$

其 z 变换为

$$X(z) = \frac{Az\sin\omega}{z^2 - 2z\cos\omega + 1} = \frac{Az\sin\omega}{(z-e^{j\omega})(z-e^{-j\omega})}$$

于是,系统响应的 z 变换 $Y(z)$可写作

$$Y(z) = \frac{Az\sin\omega}{(z-e^{j\omega})(z-e^{-j\omega})}\cdot H(z) \tag{8-109}$$

因为系统是稳定的,$H(z)$的极点均位于单位圆之内,它们不会与 $X(z)$的极点 $e^{j\omega}$,$e^{-j\omega}$相重合。这样,$Y(z)$可展成

$$Y(z) = \frac{az}{z-e^{j\omega}} + \frac{bz}{z-e^{-j\omega}} + \sum_{m=1}^{M}\frac{A_m z}{z-z_m} \tag{8-110}$$

式中 z_m 是$\frac{H(z)}{z}$的极点。系数 a,b 可以由式(8-109)、式(8-110)求出

$$a = \left[\frac{Y(z)}{z}(z-e^{j\omega})\right]_{z=e^{j\omega}} = A\frac{H(e^{j\omega})}{2j}$$

$$b=\left[\frac{Y(z)}{z}(z-e^{-j\omega})\right]_{z=e^{-j\omega}}=-A\frac{H(e^{-j\omega})}{2j}$$

注意到 $H(e^{j\omega})$与 $H(e^{-j\omega})$是复数共轭的，令

$$H(e^{j\omega})=|H(e^{j\omega})|e^{j\varphi}$$

$$H(e^{-j\omega})=|H(e^{j\omega})|e^{-j\varphi}$$

代入式(8-110)，得到

$$Y(z)=\frac{A\cdot|H(e^{j\omega})|}{2j}\left(\frac{ze^{j\varphi}}{z-e^{j\omega}}-\frac{ze^{-j\varphi}}{z-e^{-j\omega}}\right)+\sum_{m=1}^{M}\frac{A_m z}{z-z_m}$$

显然，$Y(z)$的逆变换为

$$y(n)=\frac{A\cdot|H(e^{j\omega})|}{2j}[e^{j(n\omega+\varphi)}-e^{-j(n\omega+\varphi)}]+\sum_{m=1}^{M}A_m(z_m)^n \tag{8-111}$$

对于稳定系统，其 $H(z)$的极点全部位于单位圆内，即$|z_m|<1$。这样，当 $n\to\infty$，由 $H(z)$的极点所对应的各指数衰减序列都趋于零。所以稳态响应$y_{ss}(n)$就是式(8-111)中的第一项，即

$$\begin{aligned}y_{ss}(n)&=\frac{A|H(e^{j\omega})|}{2j}[e^{j(n\omega+\varphi)}-e^{-j(n\omega+\varphi)}]\\&=A|H(e^{j\omega})|\sin(n\omega+\varphi)\end{aligned} \tag{8-112}$$

由式(8-112)可以看出，若输入是正弦序列，则系统的稳态响应也是正弦序列，如果令

$$x(n)=A\sin(n\omega-\theta_1)$$

$$y_{ss}(n)=B\sin(n\omega-\theta_2)$$

则
$$H(e^{j\omega})=\frac{B}{A}e^{j[-(\theta_2-\theta_1)]}$$

即
$$|H(e^{j\omega})|=\frac{B}{A}$$

$$\varphi=-(\theta_2-\theta_1)$$

其中 $H(e^{j\omega})$就是离散系统的频率响应，它表示输出序列的幅度和相位相对于输入序列的变化。显然 $H(e^{j\omega})$是正弦序列包络频率 ω 的连续函数，如图 8-16 所示。

通常 $H(e^{j\omega})$是复数，所以一般写成

$$H(e^{j\omega})=|H(e^{j\omega})|e^{j\varphi(\omega)}$$

式中$|H(e^{j\omega})|$是离散系统的幅度响应，$\varphi(\omega)$(或记作 φ)是相位响应。由式(8-82)可知

$$H(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)e^{-jn\omega} \tag{8-113}$$

因此，离散系统的频率响应$H(e^{j\omega})$与单位样值响应 $h(n)$是一对傅里叶变换。

由式(8-113)可以看出，由于$e^{j\omega}$是周期函数，因而离散系统的频率响应$H(e^{j\omega})$必然也是周期函数，其周期为序列的重复频率$\omega_s\left(=\dfrac{2\pi}{T}\right.$，若令$T=1$，则$\left.\omega_s=2\pi\right)$，这是离散系统有别于连续系统的一个突出的特点。

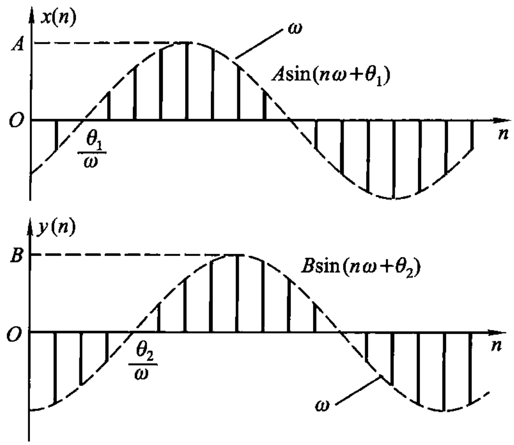


图 8-16 正弦输入与输出序列

应当指出，类似于模拟滤波器，离散系统(数字滤波器)按其频率特性也有低通、高通、带通、带阻、全通之分。由于频率响应$H(e^{j\omega})$的周期性，因此这些特性完全可以在$-\dfrac{\omega_s}{2}\leqslant\omega\leqslant\dfrac{\omega_s}{2}$范围内得到区分，如图 8-17 所示。

(二) 频率响应的几何确定法

类似于连续系统，也可以用系统函数$H(z)$在z平面上零极点分布，通过几何方法简便而直观地求出离散系统的频率响应。

若已知

$$H(z)=\frac{\prod\limits_{r=1}^{M}(z-z_r)}{\prod\limits_{k=1}^{N}(z-p_k)}$$

则

$$H(e^{j\omega})=\frac{\prod\limits_{r=1}^{M}(e^{j\omega}-z_r)}{\prod\limits_{k=1}^{N}(e^{j\omega}-p_k)}=|H(e^{j\omega})|e^{j\varphi(\omega)}$$

令

$$e^{j\omega}-z_r=A_re^{j\psi_r}$$

$$e^{j\omega}-p_k=B_ke^{j\theta_k}$$

于是幅度响应

$$|H(e^{j\omega})|=\frac{\prod\limits_{r=1}^{M}A_r}{\prod\limits_{k=1}^{N}B_k}\tag{8-114}$$

相位响应

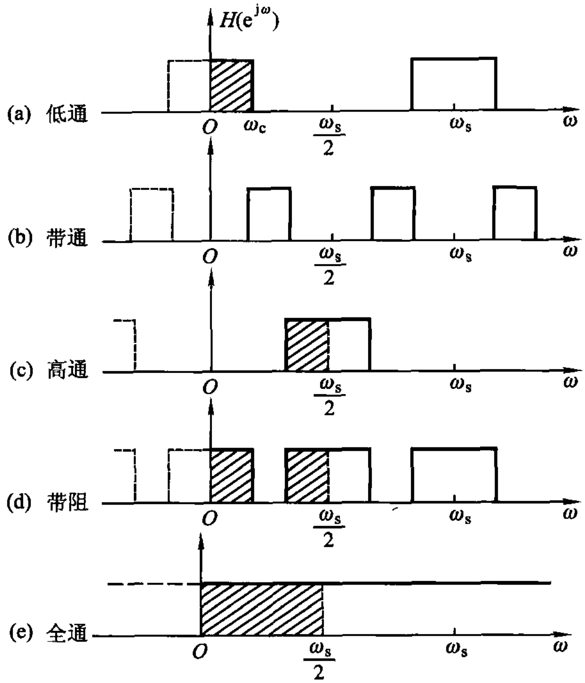


图 8－17　离散系统的各种频率响应

$$\varphi(\omega)=\sum_{r=1}^{M}\psi_r-\sum_{k=1}^{N}\theta_k \tag{8-115}$$

显然，式中 A_r，ψ_r 分别表示 z 平面上零点 z_r 到单位圆上某点 $e^{j\omega}$ 的矢量 $(e^{j\omega}-z_r)$ 的长度与夹角，B_k，θ_k 表示极点 p_k 到 $e^{j\omega}$ 的矢量 $(e^{j\omega}-p_k)$ 的长度与夹角，如图 8－18 所示。如果单位圆上的点 D 不断移动，就可以得到全部的频率响应。图中 C 点对应于 $\omega=0$，E 点对应于 $\omega=\omega_s/2$。由于离散系统频响是周期性的，因此只要 D 点转一周就可以了。利用这种方法可以比较方便地由 $H(z)$ 的零极点位置求出该系统的频率响应。可见频率响应的形状取决于 $H(z)$ 的零极点分布，也

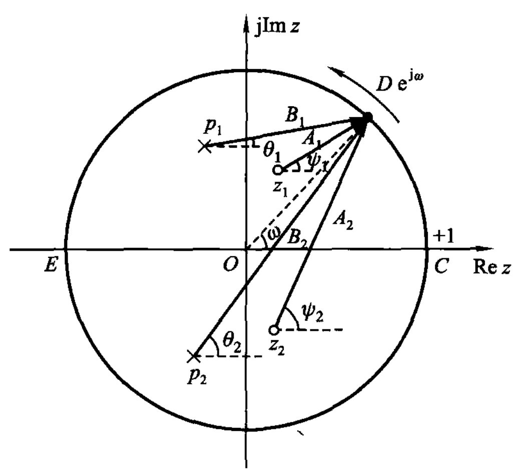


图 8－18　频率响应 $H(e^{j\omega})$ 的几何确定法

就是说,取决于离散系统的形式及差分方程各系数的大小。

不难看出,位于 $z=0$ 处的零点或极点对幅度响应不产生作用,因而在 $z=0$ 处加入或去除零极点,不会使幅度响应发生变化,而只会影响相应响应。此外,还可以看出,当 $e^{j\omega}$点旋转到某个极点(p_i)附近时,如果矢量的长度 B_i 最短,则频率响应在该点可能出现峰值。若极点 p_i 愈靠近单位圆,B_i 愈短,则频率响应在峰值附近愈尖锐。如果极点 p_i 落在单位圆上,$B_i=0$,则频率响应的峰值趋于无穷大。对于零点来说其作用与极点恰恰相反。

例 8-22 求图 8-19(a)① 所示一阶离散系统的频率响应。

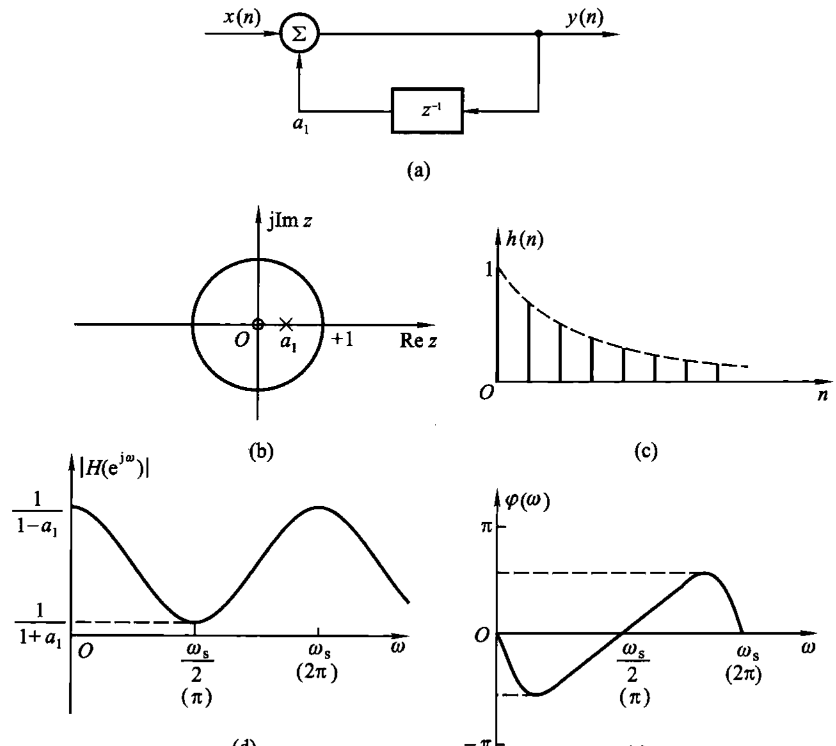


图 8-19 一阶离散系统的频率响应

解 该一阶系统的差分方程为

$$y(n)=a_1y(n-1)+x(n)\quad(0<a_1<1)$$

通常,系统为因果序列,其系统函数为

① 为适应变换域分析的需要,从本例开始,离散系统方框图中的单位延时器用符号“z^{-1}”表示,见图 8-19(a)。

$$H(z)=\frac{z}{z-a_1}\quad (|z|>a_1)$$

单位样值响应为

$$h(n)=a_1^n u(n)$$

这样,该一阶系统的频率响应为

$$H(e^{j\omega})=\frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega}-a_1}$$

$$=\frac{1}{(1-a_1\cos\omega)+ja_1\sin\omega}$$

于是,幅度响应

$$|H(e^{j\omega})|=\frac{1}{\sqrt{1+a_1^2-2a_1\cos\omega}}$$

相位响应

$$\varphi(\omega)=-\arctan\left(\frac{a_1\sin\omega}{1-a_1\cos\omega}\right)$$

$h(n)$,$|H(e^{j\omega})|$,$\varphi(\omega)$的形状如图 8-19(c)~(e)所示。显然为了保证该系统稳定,要求$|a_1|<1$。若 $0<a_1<1$,则系统呈“低通”特性;若 $-1<a_1<0$,则系统呈“高通”特性;若 $a_1=0$ 则呈“全通”特性。此例给出的一阶离散系统($0<a_1<1$)与 RC 或 RL 一阶模拟电路有“相仿”的特性。

例 8-23　求图 8-20(a)所示二阶离散系统的频率响应。

解　该系统的差分方程为

$$y(n)=a_1y(n-1)+a_2y(n-2)+b_1x(n-1)$$

系统函数写作

$$H(z)=\frac{b_1z^{-1}}{1-a_1z^{-1}-a_2z^{-2}}$$

若 a_1,a_2 为实系数,且 $a_1^2+4a_2<0$,则 $H(z)$含有一对共轭极点,令它们是

$$p_{1,2}=re^{\pm j\theta}$$

对此因果系统,$H(z)$的收敛域应为$|z|\geqslant r$。

容易求得 r,θ 与系数 a_1,a_2 的关系为

$$(1-re^{j\theta}z^{-1})(1-re^{-j\theta}z^{-1})=1-a_1z^{-1}-a_2z^{-2}$$

得到

$$r^2=-a_2$$

$$2r\cos\theta=a_1$$

于是 $H(z)$可写成

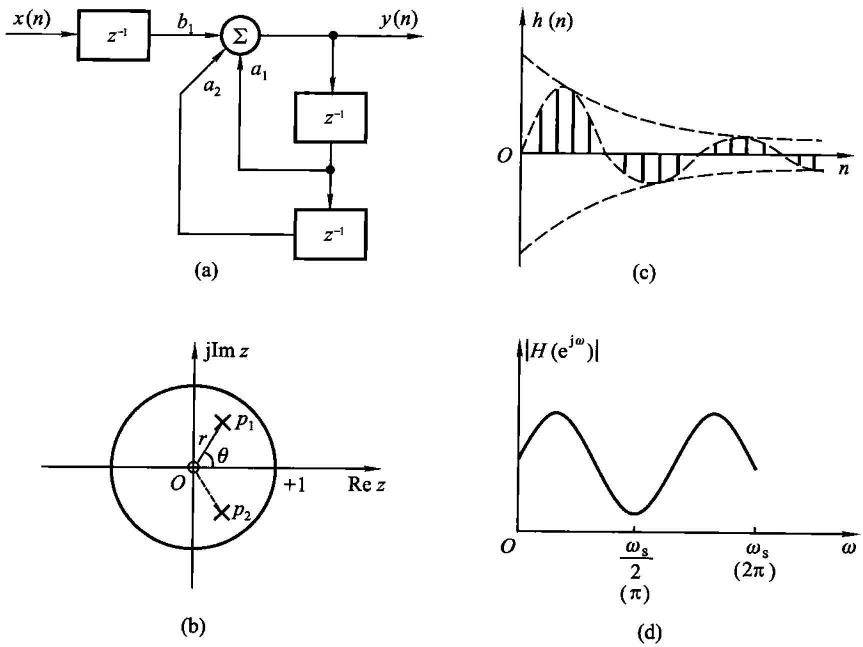


图 8-20 二阶离散系统的频率响应

$$H(z)=\frac{b_1z^{-1}}{(1-re^{j\theta}z^{-1})(1-re^{-j\theta}z^{-1})}$$

可见 $H(z)$除一对共轭极点外，还在 $z=0$ 点有一个零点，如图 8-20(b)所示。

若把 $H(z)$展成部分分式，得

$$H(z)=A\left(\frac{1}{1-re^{j\theta}z^{-1}}-\frac{1}{1-re^{-j\theta}z^{-1}}\right)$$

其中

$$A=\frac{b_1}{2jr\sin\theta}$$

对 $H(z)$进行逆变换，得到单位样值响应为

$$\begin{aligned}h(n)&=A(r^ne^{jn\theta}-r^ne^{-jn\theta})u(n)\\&=2jAr^n\sin(n\theta)\cdot u(n)=\frac{b_1r^{n-1}}{\sin\theta}\cdot\sin(n\theta)u(n)\end{aligned}$$

如图 8-20(c)所示，若 $r<1$，极点位于单位圆内，$h(n)$为衰减型，此系统是稳定的。

系统的频率响应为

$$H(e^{j\omega})=\frac{b_1e^{-j\omega}}{1-a_1e^{-j\omega}-a_2e^{-2j\omega}}$$

根据 $H(z)$ 的零极点分布，通过几何方法可以大致估计出频率响应的形状，如图 8-20(d)所示。此例给出的二阶离散系统与 RLC 二阶模拟电路有"相仿"的特性。

例 8-24　求图 8-21(a)所示离散系统的频率响应。

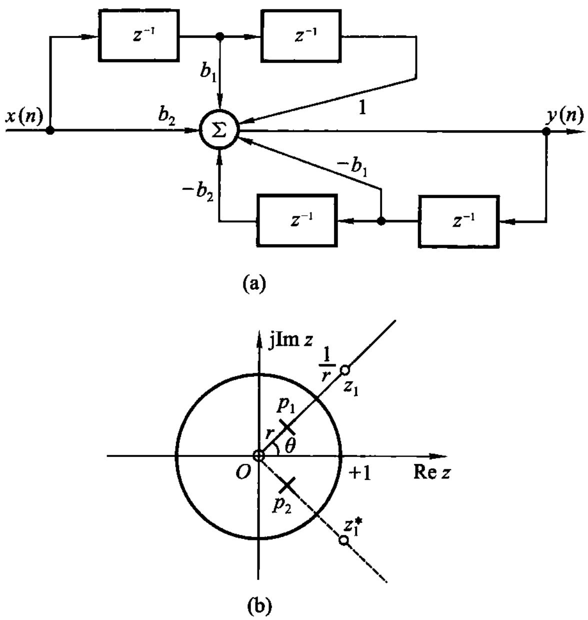


图 8-21　二阶全通离散系统

解　该系统的差分方程为

$$y(n)=x(n-2)+b_1x(n-1)+b_2x(n)-b_2y(n-2)-b_1y(n-1)$$

系统函数为

$$H(z)=\frac{b_2+b_1z^{-1}+z^{-2}}{1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}$$

若 b_1,b_2 为实系数，且 $b_1^2-4b_2<0$，则 $H(z)$ 具有一对共轭极点与一对共轭零点。这样 $H(z)$ 可表示成

$$H(z)=\frac{b_2(z-z_1)(z-z_1^*)}{(z-p_1)(z-p_1^*)}$$

令

$$z_1=r_1e^{j\theta_1}$$

$$p_1=r_2e^{j\theta_2}$$

可以求出

$$r_1^2 = \frac{1}{b_2}$$

$$r_2^2 = b_2$$

$$2b_2 r_1 \cos\theta_1 = -b_1$$

$$2r_2 \cos\theta_2 = -b_1$$

显然

$$r_2 = \frac{1}{r_1} = r = \sqrt{b_2}$$

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta$$

$$\cos\theta = -\frac{b_1}{2\sqrt{b_2}}$$

因此,$H(z)$的零极点位于

$$z_1 = \frac{1}{r}e^{j\theta}, z_1^* = \frac{1}{r}e^{-j\theta}$$

$$p_1 = re^{j\theta}, p_1^* = re^{-j\theta}$$

系统的频率响应是

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \left[\frac{z^{-1}+b_1+b_2 z}{b_2 z^{-1}+b_1+z}\right]_{z=e^{j\omega}} \\ &= \frac{e^{-j\omega}+b_1+b_2 e^{j\omega}}{b_2 e^{-j\omega}+b_1+e^{j\omega}} \\ &= \frac{(b_1+\cos\omega+b_2\cos\omega)+j(b_2\sin\omega-\sin\omega)}{(b_1+\cos\omega+b_2\cos\omega)-j(b_2\sin\omega-\sin\omega)} \end{aligned}$$

显然

$$|H(e^{j\omega})| = 1$$

$$\varphi(\omega) = 2\arctan\left[\frac{(b_2-1)\sin\omega}{b_1+(b_2+1)\cos\omega}\right]$$

可见该系统是全通离散系统。不难看出,全通系统零、极点分布的特征是:零点与极点的模量互为倒数,辐角相等。利用 s 平面与 z 平面的映射规律也可借助连续系统全通函数零、极点分布特征导出上述结论。

以本节的内容作为理论基础,利用延时、倍乘、相加等基本运算单元可以构成数字滤波器。在下一节将初步认识数字滤波器的原理,待第十章给出进一步的分析和简要的设计方法。

8.11 z 变换的应用实例

z 变换理论在数字信号处理技术中具有重要的应用价值。例如,在数字滤

波器的实现以及语音信号的分析与合成等众多领域中都需要借助 z 变换理论进行研究、分析与设计。在本章结束之前，仅举出两个应用实例，以激发读者的学习兴趣，建立对 z 变换应用的初步认识。我们将在以后各章以及多种后续课程中看到，本章给出的基本理论和方法在许多工程领域中得到更为广泛的应用。

（一）数字式自激振荡器

在电子线路课程中可以知道，模拟式正弦波自激振荡器是利用正反馈放大器构成的。在正反馈环路中需要接入 LC 谐振电路或 RC 选频网络。此类电路在平衡稳定工作之后，系统函数的极点应位于 s 平面的虚轴上，可以自动产生正弦（余弦）信号（可参看第十一章 11.3 节）。

类似的原理也适用于离散时间系统，为保证系统自激，系统函数的极点应位于 z 平面的单位圆上，相应的时域信号为等幅正弦（余弦）波。

如果我们期望 $h(n)$ 为

$$h(n)=\cos(n\Omega)u(n) \tag{8-116}$$

或

$$h(n)=\sin(n\Omega)u(n) \tag{8-117}$$

则相应的 z 变换式为

$$H(z)=\frac{z^2-z\cos\Omega}{z^2-2z\cos\Omega+1}\quad（余弦） \tag{8-118}$$

或

$$H(z)=\frac{z\sin\Omega}{z^2-2z\cos\Omega+1}\quad（正弦） \tag{8-119}$$

我们按照 $h(n)$ 为余弦信号的 $H(z)$ 式可以画出实现余弦波自激振荡的离散时间系统结构如图 8-22(a) 所示。外加 $\delta(n)$ 或给予初值 $y(0)$ 可自动产生 $\cos(n\Omega)$ 信号。在此图中，共用了三个延时单元（z^{-1}），为节省延时单元，可将图 8-22(a) 简化为图 8-22(b)。下面分析此简化过程。设图 8-22(a) 的输入与输出信号分别以 $X(z)$ 和 $Y(z)$ 表示，为导出节省延时单元的简化框图，我们引用中间信号 $W(z)$。由图 8-22(a) 可以写出

$$\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{z^2-z\cos\Omega}{z^2-2z\cos\Omega+1}=\frac{1-z^{-1}\cos\Omega}{1-2z^{-1}\cos\Omega+z^{-2}} \tag{8-120}$$

令

$$\left.\begin{aligned}X(z)&=W(z)(1-2z^{-1}\cos\Omega+z^{-2})\\Y(z)&=W(z)(1-z^{-1}\cos\Omega)\end{aligned}\right\} \tag{8-121}$$

也即

$$\left.\begin{aligned}W(z)&=\frac{X(z)}{1-2z^{-1}\cos\Omega+z^{-2}}\\Y(z)&=W(z)(1-z^{-1}\cos\Omega)\end{aligned}\right\} \tag{8-122}$$

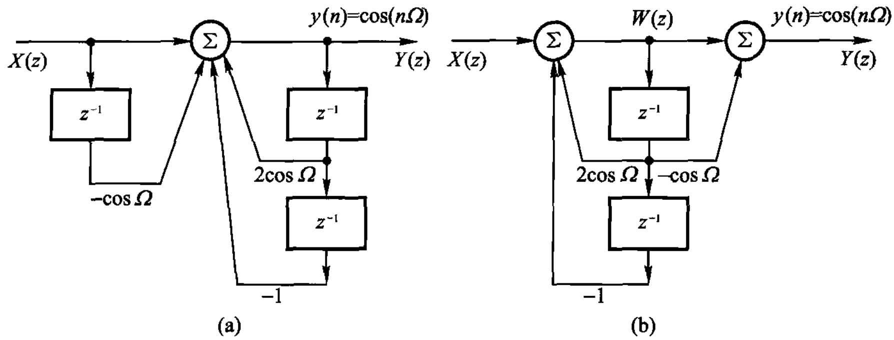


图 8-22　离散时间系统自激振荡器

这一结果表明,输入信号 $X(z)$ 经 $\dfrac{1}{1-2z^{-1}\cos\Omega+z^{-2}}$ 的作用产生 $W(z)$,而 $W(z)$ 再经 $(1-z^{-1}\cos\Omega)$ 关系得到 $Y(z)$,按此原理画出的结构正如图 8-22(b)所示,由于延时单元得到共用,因而可以节省。关于这种简化方法的一般分析详见第十章 10.6 节图 10-41 以及第十一章的习题 11-32。

与模拟电路构成的自激振荡器相比较,这种数字式振荡器具有体积小、重量轻、易于标准化(规格化)、借助可编程技术灵活改变振荡频率等优点。

这种振荡器的典型应用之一是作为按键式电话机中双音多频(DTMF)信号的产生电路。在 DTMF 信号产生系统之中,按键的每个按钮都对应一对高、低音组合信号,如表 8-8 所示。表中,高频组可产生 4 种不同频率的正弦信号(称为列频率),低频组给出另外 4 种不同频率的正弦信号(称为行频率)。当按下某一按钮时将产生特定的一组(两个)正弦信号。例如,对应数字"5"产生 770 Hz 与 1 336 Hz 的自激信号,在接收端判别两信号之频率给出对应的数字"5"。在发送端,利用两个可编程数字振荡器(即两个如图 8-22 所示的系统)即可完成 DTMF 信号之产生。很明显,在此系统中正是利用了数字振荡器体积、重量小和可编程等优点,如果改用模拟电路将遇到很大困难,几乎不能实现。

表 8-8　DTMF 信号产生规律

高频组 / 低频组	1 209 Hz	1 336 Hz	1 447 Hz	1 633 Hz
697 Hz	1	2	3	A
770 Hz	4	5	6	B
850 Hz	7	8	9	C
941 Hz	*	0	#	D

按照类似的方法还可画出 $h(n)$为正弦信号时产生自激振荡的离散时间系统结构图。在实际应用中可以把产生 $\cos(n\Omega)$和 $\sin(n\Omega)$之系统组合在一起，形成如图 8-23 所示之结构。图中，以 $y_{\mathrm{I}}(n)$表示 $\cos(n\Omega)$，另以 $y_{\mathrm{Q}}(n)$表示 $\sin(n\Omega)$。这是一组单频正交信号。通常，把 $y_{\mathrm{I}}(n)$称为同相分量，而 $y_{\mathrm{Q}}(n)$称为正交分量。在许多通信或信号处理系统中经常有此需要。这类应用的实际例子可参看第六章图 6-25 的有关分析以及第九章 9.8 节关于 OFDM 通信系统原理。

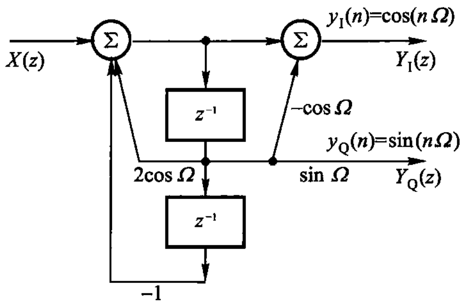


图 8-23 离散时间系统单频正交信号产生器

必须指出，图 8-23 之系统结构在实际的通用 DSP(数字信号处理器)硬件实现过程中具有很好的应用价值。

(二) 冲激响应不变法数字滤波器构成原理简介

在 8.10 节我们对数字滤波器的构成已经建立了初步概念。例 8-22 是一个一阶低通数字滤波器(也可改换参数成为高通)。而例 8-23 和例 8-24 分别具有二阶带通或全通响应特性。不过，这些例子仅停留在对离散时间系统频响特性的理论分析层面，与实际应用尚有一定距离，这里给出比较接近工程实用的例子，简介用冲激响应不变法构成数字滤波器的原理，举出数据实例。进一步的深入研究将在第十章和后续课程(主要是“数字信号处理”)中给出。

这种滤波器的设计原理如下：首先按照所需滤波器频响特性之要求，选定一种适当的模拟滤波器，称它为“原型(prototype)滤波器”。然后由 s 域表达式转换为相应的 z 域表达式，最后实现数字滤波器结构。二者转换的约束规律是使离散时间系统的 $h(n)$等于连续时间系统 $h(t)$之抽样值，此即“冲激不变”名称之由来。按此原理有

$$H(s)=\mathscr{L}[h(t)]$$

$$H(z)=\mathscr{Z}[h(n)]$$

令

$$h(n)=h(t)\Big|_{t=nT}$$

$$\begin{cases} h(t) = \sum_{i=1}^{N} A_i e^{p_i t} \\ h(n) = \sum_{i=1}^{N} A_i e^{p_i nT} \end{cases} \tag{8-123}$$

这里给出了全部极点都为一阶(最常见情况)时,$h(t)$与 $h(n)$之对应。严格讲,$h(n)$虽为 $h(t)$以间隔 T 构成之抽样,但在 $t=0$ 点尚需补足$\frac{A_i}{2}$[理由见第八章 8.6 节式(8-61)和式(8-62)的有关说明]。引用式(8-58)和式(8-60)的结果可以得到 s 域与 z 域的关系式为

$$\begin{cases} H(s) = \sum_{i=1}^{N} \frac{A_i}{s-p_i} \\ H(z) = \sum_{i=1}^{N} \frac{A_i}{1-z^{-1}e^{p_i T}} \end{cases} \tag{8-124}$$

下面给出具体设计实例。若选定模拟低通滤波器原型之系统函数(这种系统函数称为巴特沃思函数,将在第十章 10.2 节详述)表达式为:

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{\omega_c^2}{s^2+\sqrt{2}\,\omega_c s+\omega_c^2} \\ &= \frac{\omega_c^2}{(s-p_1)(s-p_2)} \end{aligned} \tag{8-125}$$

其中 p_1, p_2 为 $H(s)$的极点,它位于 s 左半平面,等于

$$p_1=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{j}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\omega_c$$

$$p_2=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\mathrm{j}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\omega_c$$

如图 8-24(a)所示。将极点值代入 $H(s)$表达式并展开部分分式,得到

$$\begin{aligned} H(s) &= \omega_c^2\left(\frac{K_1}{s-p_1}+\frac{K_2}{s-p_2}\right) \\ &= \frac{\omega_c^2}{p_2-p_1}\left(\frac{1}{s-p_1}-\frac{1}{s-p_2}\right) \end{aligned} \tag{8-126}$$

把 p_1, p_2 代入上式,整理后得到

$$H(s)=\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{j}\omega_c\left[\frac{1}{s+(1+\mathrm{j})\frac{\sqrt{2}}{2}\omega_c}-\frac{1}{s+(1-\mathrm{j})\frac{\sqrt{2}}{2}\omega_c}\right] \tag{8-127}$$

与此对应的 z 域系统函数 $H(z)$可写作

$$H(z)=\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{j}\omega_{\mathrm{c}}\left(\frac{1}{1-z^{-1}\mathrm{e}^{p_1T}}-\frac{1}{1-z^{-1}\mathrm{e}^{p_2T}}\right) \tag{8-128}$$

将 p_1,p_2 代入后经整理得到

$$H(z)=\frac{b_1z^{-1}}{1-a_1z^{-1}-a_2z^{-2}} \tag{8-129}$$

其中

$$b_1=\sqrt{2}\,\omega_{\mathrm{c}}\mathrm{e}^{-\frac{\omega_{\mathrm{c}}T}{\sqrt{2}}}\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\omega_{\mathrm{c}}T\right)$$

$$a_1=2\mathrm{e}^{-\frac{\omega_{\mathrm{c}}T}{\sqrt{2}}}\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\omega_{\mathrm{c}}T\right)$$

$$a_2=-\mathrm{e}^{-\sqrt{2}\omega_{\mathrm{c}}T}$$

$H(z)$的两个极点分别位于 $\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\omega_{\mathrm{c}}T}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\sqrt{2}}{2}\omega_{\mathrm{c}}T}$和 $\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\omega_{\mathrm{c}}T}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\sqrt{2}}{2}\omega_{\mathrm{c}}T}$，它们由 s 平面上的两极点映射而来。s 域和 z 域极点分布图分别示于图 8-24(a)和(b)。

图 8-24(c)是可以实现按给定 $H(s)$函数完成所需滤波功能的两个实际电路。容易求得，这两种电路的电压转移函数都为

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)}=\frac{1}{2}\,\frac{\omega_{\mathrm{c}}^2}{(s^2+\sqrt{2}\,\omega_{\mathrm{c}}s+\omega_{\mathrm{c}}^2)} \tag{8-130}$$

与前面的 $H(s)$相比较，这里出现了系数$\frac{1}{2}$，显然，这并不影响我们的讨论。关于由给定 $H(s)$实现 LC 电路的一般原理详见第十章 10.4 节，此处不再说明。

图 8-24(d)是按照已导出的 $H(z)$实现离散时间系统之结构图，也即我们要设计的数字滤波器。在此图中有三个延时器(z^{-1}方框)，为节省延时部件，可将此结构简化为图 8-24(e)，二者之 $H(z)$函数完全相同。这种简化原理与前文分析图 8-22 从(a)到(b)之简化过程一致。

图 8-24(f)和(g)分别给出以上分析的模拟与数字滤波器之频率响应特性$|H(\mathrm{j}\omega)|$和$|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|$曲线。可以看出，数字滤波器的频率响应并不是模拟滤波器频率响应的简单重现，而是由它混叠而成。因此，只有当模拟滤波器的频率响应带限于折叠频率 $\omega_{\mathrm{s}}/2$ 之内(即当$|\omega|>\omega_{\mathrm{s}}/2$ 时，$H(\mathrm{j}\omega)=0$)才能保证在$|\omega|<\omega_{\mathrm{s}}/2$ 范围内使数字滤波器的频率响应完全重现模拟滤波器的频率响应。如果 $H(\mathrm{j}\omega)$在$\frac{\omega_{\mathrm{s}}}{2}$范围内衰减足够快，则数字滤波器的频率响应近于模拟滤波器的频率响应。

利用冲激(样值)响应不变法设计数字滤波器具有原理简单、便于与模拟滤波器直接对应等优点，它的主要缺点是由于 $s\sim z$ 平面的多值映射所引起的混叠现象。因此不能用于高通和带阻滤波器设计。为了解决这个问题，又出现了

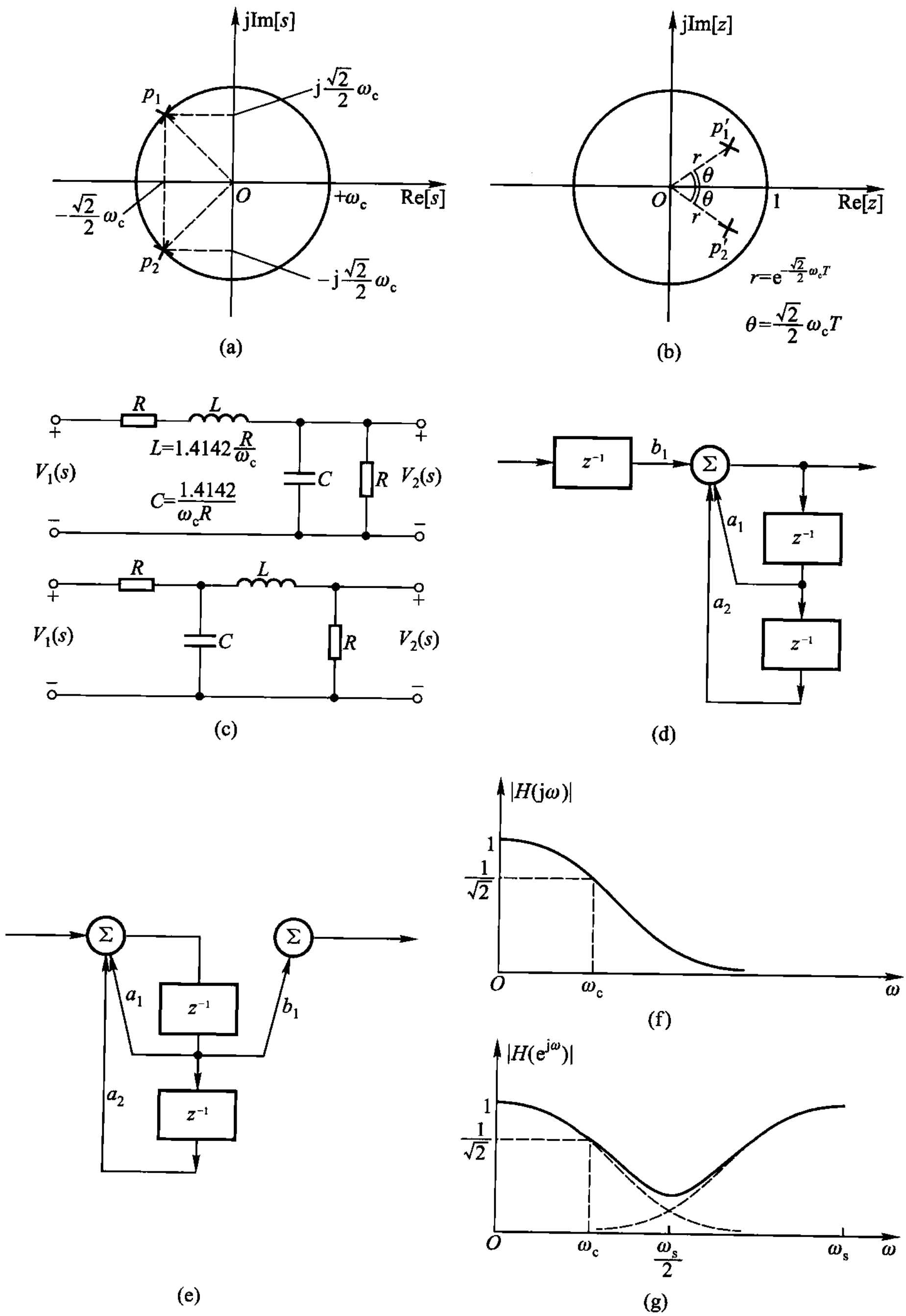


图 8－24　二阶巴特沃思模拟与数字滤波器之对应

“双线性变换法”设计 IIR 数字滤波器，详见第十章 10.6 节之(二)。

以上讨论初步介绍了 z 变换在实际问题中的应用。冲激不变法的原理完全是以第八章 8.6 节(二)的分析作为理论基础，是式(8-57)到式(8-60)用于滤波器设计的具体表现。

与模拟滤波器相比较，数字滤波器显示许多优点。经数字化之后，系统性能稳定、参数准确，改变其特性灵活、方便；易于实现集成化、降低重量和体积；易于标准化；不存在两端接口的阻抗匹配问题等。

至此，已举出 z 变换理论在工程应用中的两个实例。我们将在第十章进一步研究 z 变换在数字滤波器设计中的应用；第十一章将借助 z 变换分析离散时间反馈系统的性能；第十二章将利用 z 变换求解离散时间系统的状态方程。在后续许多课程中还会不断看到这方面的广泛应用。在与本课程密切配合的 MATLAB实验课程中可以利用 z 变换构建产生语音信号的模型，读者如有兴趣可查阅参考书目[5]的第三篇第九章。

习　题

8-1 求下列序列的 z 变换 $X(z)$，并标明收敛域，绘出 $X(z)$ 的零、极点分布图。

(1) $\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$

(2) $\left(-\frac{1}{4}\right)^n u(n)$

(3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-n} u(n)$

(4) $\left(\frac{1}{3}\right)^n u(-n)$

(5) $-\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1)$

(6) $\delta(n+1)$

(7) $\left(\frac{1}{2}\right)^n [u(n)-u(n-10)]$

(8) $\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)+\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$

(9) $\delta(n)-\frac{1}{8}\delta(n-3)$

8-2 求双边序列 $x(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$ 的 z 变换，并标明收敛域及绘出零、极点分布图。

8-3 求下列序列的 z 变换，并标明收敛域，绘出零、极点分布图。

(1) $x(n)=Ar^n\cos(n\omega_0+\phi)\cdot u(n)\quad(0<r<1)$

(2) $x(n)=R_N(n)=u(n)-u(n-N)$

8-4 直接从下列 z 变换看出它们所对应的序列。

(1) $X(z)=1\qquad(|z|\leqslant\infty)$

(2)$X(z)=z^3$ $(|z|<\infty)$

(3)$X(z)=z^{-1}$ $(0<|z|\leqslant\infty)$

(4)$X(z)=-2z^{-2}+2z+1$ $(0<|z|<\infty)$

(5)$X(z)=\dfrac{1}{1-az^{-1}}$ $(|z|>a)$

(6)$X(z)=\dfrac{1}{1-az^{-1}}$ $(|z|<a)$

8-5 求下列 $X(z)$的逆变换 $x(n)$。

(1)$X(z)=\dfrac{1}{1+0.5z^{-1}}$ $(|z|>0.5)$

(2)$X(z)=\dfrac{1-0.5z^{-1}}{1+\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}$ $\left(|z|>\dfrac{1}{2}\right)$

(3)$X(z)=\dfrac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-2}}$ $\left(|z|>\dfrac{1}{2}\right)$

(4)$X(z)=\dfrac{1-az^{-1}}{z^{-1}-a}$ $\left(|z|>\left|\dfrac{1}{a}\right|\right)$

8-6 利用三种逆 z 变换方法求下列 $X(z)$的逆变换 $x(n)$。

$$X(z)=\frac{10z}{(z-1)(z-2)} \quad (|z|>2)$$

8-7 已知 $x(n)$的 z 变换为 $X(z)$,试证明下列关系。

(1)$\mathscr{Z}[a^n x(n)]=X\left(\dfrac{z}{a}\right)$

(2)$\mathscr{Z}[e^{-an}x(n)]=X(e^a z)$

(3)$\mathscr{Z}[nx(n)]=-z\dfrac{dX(z)}{dz}$

(4)$\mathscr{Z}[x^*(n)]=X^*(z^*)$

(对于以上各式可为单边,也可为双边 z 变换。)

8-8 已知 $x(n)$的双边 z 变换为 $X(z)$,证明

$$\mathscr{Z}[x(-n)]=X(z^{-1})$$

8-9 利用幂级数展开法求 $X(z)=e^z$,$(|z|<\infty)$所对应的序列 $x(n)$。

8-10 求下列 $X(z)$的逆变换 $x(n)$。

(1)$X(z)=\dfrac{10}{(1-0.5z^{-1})(1-0.25z^{-1})}$ $(|z|>0.5)$

(2)$X(z)=\dfrac{10z^2}{(z-1)(z+1)}$ $(|z|>1)$

(3)$X(z)=\dfrac{1+z^{-1}}{1-2z^{-1}\cos\omega+z^{-2}}$ $(|z|>1)$

8-11 求下列 $X(z)$的逆变换 $x(n)$。

(1)$X(z)=\dfrac{z^{-1}}{(1-6z^{-1})^2}$ $(|z|>6)$

(2)$X(z)=\dfrac{z^{-2}}{1+z^{-2}}$ $(|z|>1)$

8-12 画出 $X(z)=\dfrac{-3z^{-1}}{2-5z^{-1}+2z^{-2}}$ 的零、极点分布图，在下列三种收敛域下，哪种情况对应左边序列，右边序列，双边序列？并求各对应序列。

(1) $|z|>2$

(2) $|z|<0.5$

(3) $0.5<|z|<2$

8-13 已知因果序列的 z 变换 $X(z)$，求序列的初值 $x(0)$ 与终值 $x(\infty)$。

(1) $X(z)=\dfrac{1+z^{-1}+z^{-2}}{(1-z^{-1})(1-2z^{-1})}$

(2) $X(z)=\dfrac{1}{(1-0.5z^{-1})(1+0.5z^{-1})}$

(3) $X(z)=\dfrac{z^{-1}}{1-1.5z^{-1}+0.5z^{-2}}$

8-14 已知 $X(z)=\ln\left(1+\dfrac{a}{z}\right)$，$(|z|>|a|)$，求对应的序列 $x(n)$。

$$\left[\text{提示：利用级数展开式 } \ln(1+y)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{y^n}{n},\ y<1。\right]$$

8-15 证明表 8-5 中所列的和函数 z 变换公式，即：

已知 $\mathscr{Z}[x(n)]=X(z)$，则

$$\mathscr{Z}\left[\sum_{k=0}^{n}x(k)\right]=\frac{z}{z-1}X(z)$$

8-16 试证明实序列的相关定理。

$$\mathscr{Z}\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(m)x(m-n)\right]=H(z)X\left(\frac{1}{z}\right)$$

其中：$H(z)=\mathscr{Z}[h(n)]$

$X(z)=\mathscr{Z}[x(n)]$

8-17 利用卷积定理求 $y(n)=x(n)*h(n)$，已知

(1) $x(n)=a^nu(n)$　$h(n)=b^nu(-n)$

(2) $x(n)=a^nu(n)$　$h(n)=\delta(n-2)$

(3) $x(n)=a^nu(n)$　$h(n)=u(n-1)$

8-18 利用 z 变换求例 7-15 中给出的两序列的卷积，即求

$$y(n)=x(n)*h(n)$$

其中：$h(n)=a^nu(n)$　$(0<a<1)$

$x(n)=R_N(n)=u(n)-u(n-N)$

8-19 已知下列 z 变换式 $X(z)$ 和 $Y(z)$，利用 z 域卷积定理求 $x(n)$ 与 $y(n)$ 乘积的 z 变换。

(1) $X(z)=\dfrac{1}{1-0.5z^{-1}}$　$(|z|>0.5)$

$Y(z)=\dfrac{1}{1-2z}$　$(|z|<0.5)$

(2) $X(z)=\dfrac{0.99}{(1-0.1z^{-1})(1-0.1z)}$ $(0.1<|z|<10)$

$Y(z)=\dfrac{1}{1-10z}$ $(|z|>0.1)$

(3) $X(z)=\dfrac{z}{z-e^{-b}}$ $(|z|>e^{-b})$

$Y(z)=\dfrac{z\sin\omega_0}{z^2-2z\cos\omega_0+1}$ $(|z|>1)$

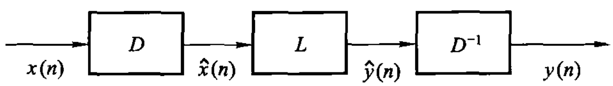
8-20 在第七章7.7节曾介绍利用时域特性的解卷积方法，实际问题中，往往也利用变换域方法计算解卷积。本题研究一种称为“同态滤波”的解卷积算法原理。在此，需要用到 z 变换性质和对数计算。设 $x(n)=x_1(n)*x_2(n)$，若要直接把相互卷积的信号 $x_1(n)$ 与 $x_2(n)$ 分开将遇到困难。但是，对于两个相加的信号往往容易借助某种线性滤波方法使二者分离。题图8-20示出用同态滤波解卷积的原理框图，其中各部分作用如下：

(1) D 运算表示将 $x(n)$ 取 z 变换、取对数和逆 z 变换，得到包含 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 信息的相加形式。

(2) L 为线性滤波器，容易将两个相加项分离，取出所需信号。

(3) D^{-1} 相当于 D 的逆运算，也即取 z 变换、指数以及逆 z 变换，至此，可从 $x(n)$ 中按需要分离出 $x_1(n)$ 或 $x_2(n)$，完成解卷积运算。

试写出以上各步运算的表达式。



题图 8-20

8-21 用单边 z 变换解下列差分方程。

(1) $y(n+2)+y(n+1)+y(n)=u(n)$

$y(0)=1, y(1)=2$

(2) $y(n)+0.1y(n-1)-0.02y(n-2)=10u(n)$

$y(-1)=4, y(-2)=6$

(3) $y(n)-0.9y(n-1)=0.05u(n)$

$y(-1)=0$

(4) $y(n)-0.9y(n-1)=0.05u(n)$

$y(-1)=1$

(5) $y(n)=-5y(n-1)+nu(n)$

$y(-1)=0$

(6) $y(n)+2y(n-1)=(n-2)u(n)$

$y(0)=1$

8-22 用 z 变换求解习题7-25电阻梯形网络结点电压的差分方程

$$v(n+2)-3v(n+1)+v(n)=0$$

其中 $v(0)=E$

$v(N)=0$ （当 $N\to\infty$）

$n=0,1,2,\cdots,N$

8-23 因果系统的系统函数 $H(z)$ 如下所示，试说明这些系统是否稳定。

(1) $\dfrac{z+2}{8z^2-2z-3}$ (2) $\dfrac{8(1-z^{-1}-z^{-2})}{2+5z^{-1}+2z^{-2}}$

(3) $\dfrac{2z-4}{2z^2+z-1}$ (4) $\dfrac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}+z^{-2}}$

8-24 已知一阶因果离散系统的差分方程为

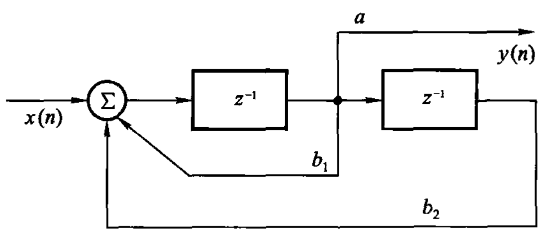
$$y(n)+3y(n-1)=x(n)$$

试求：

(1) 系统的单位样值响应 $h(n)$；

(2) 若 $x(n)=(n+n^2)u(n)$，求响应 $y(n)$。

8-25 写出题图 8-25 所示离散系统的差分方程，并求系统函数 $H(z)$ 及单位样值响应 $h(n)$。



题图 8-25

8-26 由下列差分方程画出离散系统的结构图，并求系统函数 $H(z)$ 及单位样值响应 $h(n)$。

(1) $3y(n)-6y(n-1)=x(n)$

(2) $y(n)=x(n)-5x(n-1)+8x(n-3)$

(3) $y(n)-\dfrac{1}{2}y(n-1)=x(n)$

(4) $y(n)-3y(n-1)+3y(n-2)-y(n-3)=x(n)$

(5) $y(n)-5y(n-1)+6y(n-2)=x(n)-3x(n-2)$

8-27 求下列系统函数在 $10<|z|\leqslant\infty$ 及 $0.5<|z|<10$ 两种收敛域情况下系统的单位样值响应，并说明系统的稳定性与因果性。

$$H(z)=\frac{9.5z}{(z-0.5)(10-z)}$$

8-28 在语音信号处理技术中，一种描述声道模型的系统函数具有如下形式

$$H(z)=\frac{1}{1-\sum_{i=1}^{P}a_iz^{-i}}$$

若取 $P=8$，试画出此声道模型的结构图。

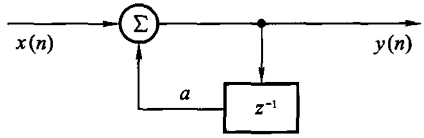
8-29 对于下列差分方程所表示的离散系统

$$y(n)+y(n-1)=x(n)$$

(1) 求系统函数 $H(z)$及单位样值响应 $h(n)$,并说明系统的稳定性。

(2) 若系统起始状态为零,如果 $x(n)=10u(n)$,求系统的响应。

8-30 对于题图 8-30 所示的一阶离散系统($0<a<1$),求该系统在单位阶跃序列$u(n)$或复指数序列 $e^{jn\omega}u(n)$激励下的响应、瞬态响应及稳态响应。



题图 8-30

8-31 用计算机对测量的随机数据 $x(n)$进行平均处理,当收到一个测量数据后,计算机就把这一次输入数据与前三次输入数据进行平均。试求这一运算过程的频率响应。

8-32 已知系统函数

$$H(z)=\frac{z}{z-k}\quad (k\ \text{为常数})$$

(1) 写出对应的差分方程;

(2) 画出该系统的结构图;

(3) 求系统的频率响应,并画出 $k=0,0.5,1$ 三种情况下系统的幅度响应和相位响应。

8-33 利用 z 平面零极点矢量作图方法大致画出下列系统函数所对应的系统幅度响应。

(1) $H(z)=\dfrac{1}{z-0.5}$

(2) $H(z)=\dfrac{z}{z-0.5}$

(3) $H(z)=\dfrac{z+0.5}{z}$

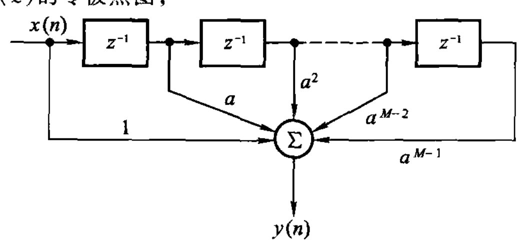
8-34 已知横向数字滤波器的结构如题图 8-34 所示。试以 $M=8$ 为例

(1) 写出差分方程。

(2) 求系统函数 $H(z)$;

(3) 求单位样值响应 $h(n)$;

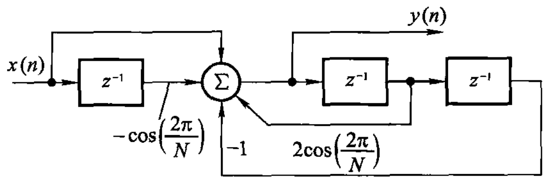
(4) 画出 $H(z)$的零极点图;



题图 8-34

(5) 粗略画出系统的幅度响应。

8-35 求题图 8-35 所示系统的差分方程、系统函数及单位样值响应。并大致画出系统函数 $H(z)$的零极点图及系统的幅度响应。



题图 8-35

8-36 已知离散系统差分方程表示式

$$y(n)-\frac{1}{3}y(n-1)=x(n)$$

(1) 求系统函数和单位样值响应;

(2) 若系统的零状态响应为 $y(n)=3\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]u(n)$,求激励信号$x(n)$;

(3) 画系统函数的零、极点分布图;

(4) 粗略画出幅频响应特性曲线;

(5) 画系统的结构框图。

8-37 已知离散系统差分方程表示式

$$y(n)-\frac{3}{4}y(n-1)+\frac{1}{8}y(n-2)=x(n)+\frac{1}{3}x(n-1)$$

(1) 求系统函数和单位样值响应;

(2) 画系统函数的零、极点分布图;

(3) 粗略画出幅频响应特性曲线;

(4) 画系统的结构框图。

8-38 已知系统函数

$$H(z)=\frac{z^2-(2a\cos\omega_0)z+a^2}{z^2-(2a^{-1}\cos\omega_0)z+a^{-2}},(a>1)$$

(1) 画出 $H(z)$在 z 平面的零、极点分布图;

(2) 借助 $s\sim z$ 平面的映射规律,利用 $H(s)$的零、极点分布特性说明此系统具有全通特性。

第九章　离散傅里叶变换以及其他离散正交变换

9.1 引　　言

在离散时间信号与系统研究的历史进程中，曾经面临一个重要问题，这就是如何把数字计算机的应用和信号分析与处理紧密地结合起来。"离散傅里叶变换(DFT)"正是在解决这一矛盾中形成的一种概念和计算方法。

在 8.9 节曾介绍序列的傅里叶变换(DTFT)，在 8.10 节已经看到离散时间系统的频域分析完全建立在 DTFT 概念的基础之上。但是，这种概念和方法未能解决利用数字计算机便捷地分析信号频谱的问题。本章将要研究的离散傅里叶变换(DFT)一词并非泛指对任意离散信号取傅里叶积分或傅里叶级数，而是指为适应利用计算机分析傅里叶变换规定的一种专门运算，将在 9.3 节给出定义。

对于连续时间信号，为了获取正、逆傅里叶变换，无论在时域或在频域，都需要对连续函数进行积分运算，而且其积分限都要包括从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 全部时间轴或频率轴的范围。对于离散时间信号，按 DTFT 的定义，其正变换为级数求和，逆变换仍为积分运算，它的求和范围仍然是从 $-\infty$ 到 $+\infty$。显然，要在数字计算机上完成这些变换，必须把计算范围从无限宽收缩到一个有限区间(注意，在时间域和频率域都应限制于有限范围)。与此同时，必须把连续函数改换为离散数据(注意，同样是在时间域和频率域两方面都应当是离散样值)。

从 9.2～9.4 节将要看到，这一问题的解决，首先是针对周期性离散信号进行的。为这种信号的傅里叶分析，定义了"离散傅里叶级数(DFS)"，这时，时域和频域的有关运算全部离散化，并限于规定的区间(时域的一个周期和频域的一个周期)。然后，借助离散傅里叶级数的概念，把有限长序列作为周期性离散信号的一个周期来处理，从而定义了"离散傅里叶变换(DFT)"。这样，就使有限长序列的傅里叶变换问题，在允许一定程度近似的条件下，同样得以利用数字计算机。必须指出，9.3 节是本课程与数字信号处理课程的结合点，也是这两门课程的核心重点。

在给出 DFT 的定义和性质分析之后，将要讨论离散时间信号取 DFT 和 z 变换之间的关系，这将是 9.5 节的研究内容。

DFT 定义的引出,仅为傅里叶分析使用计算机提供了理论依据,问题并没有全部解决。因为直接按此方法计算还要遇到一些实际困难,这就是计算速度慢、设备重复。随着样点 N 数目的增加,此矛盾将十分尖锐,致使这种计算失去实际价值。于是,人们力图寻找一种快速而简便的算法,使 DFT 不仅在原理上讲得通,而且便于付诸实现。曾经有许多人致力于研究这种方法,1965 年,库利与图基(Cooley,J. W. 和 Tukey,J. W.)总结并发展了前人的研究成果,提出了一种快速、通用地进行 DFT 的计算方法,编出了使用这种方法的第一个程序。此算法取名“快速傅里叶变换(FFT)”,也称为“库利－图基算法”。

虽然 FFT 在理论方面没有什么新的贡献,然而,作为一种算法,它的出现引起了人们巨大的兴趣,得到了迅速发展,并广泛应用于各个技术领域。FFT 把 DFT 的计算速度提高了大约 $\frac{N}{\log_2 N}$ 倍,随着 N 值的增长,其优越性更加显著。在发现 FFT 之前,DFT 的应用只能限于某些数据的事后处理,或某些系统的模拟研究,在速度与成本方面都赶不上相应的连续时间系统。FFT 的出现彻底改变了这种局面,信号的实时处理以及设备量的简化都得以实现,从此,离散时间系统的研究与应用在许多方面取代了传统的连续时间系统,20 世纪 70 年代初,国外市场就已开始出售 FFT 的专用硬件,现在 FFT 处理机已成为相当普通的计算机外围设备。在 9.6 节和 9.7 节给出 FFT 的初步原理和应用举例。

FFT 的重要意义已经远远超出了傅里叶分析本身的应用。FFT 算法之所以快速,其根本原因在于利用了原始变换矩阵的多余性,此特性也适用于傅里叶变换以外的其他一些正交变换,例如,快速沃尔什变换、数论变换等。在 FFT 的影响下,人们对于广义的快速正交变换进行了深入研究,使各种快速变换在数字信号处理中占据了重要地位。因此可以说 FFT 对数字信号处理技术的发展起了重大推动作用。

为使读者初步了解傅里叶变换以外的其他离散正交变换,在 9.8 节和 9.9 节分别介绍离散沃尔什变换(DWT)和离散余弦变换(DCT)的简要概念。

9.2 傅里叶变换的离散性与周期性

在第三章曾经注意到,傅里叶变换的离散性和周期性在时域与变换域中表现出巧妙的对称关系,具体说,这就是:呈周期性的连续时间函数,其傅里叶变换为离散的非周期频率函数(傅里叶级数,离散频谱);而非周期性的离散时间函数,其傅里叶变换为连续的周期性函数(抽样信号的频谱呈周期性)。考察这一问题发现,就傅里叶变换的离散性与周期性而论,可能出现四种类型的时域和变

换域组合，下面分别给出它们的表示式与图形。这里的分析与第三章密切衔接[①]，仍沿用那里的一部分符号，但是，为了突出正、逆变换的对称形式，也便于后面讨论，逆变换中的变量不取角频率 ω，而是取频率 f。函数式用 $x(t)$，不用 $f(t)$。具体符号列写如下：

t：连续时间变量

$x(t)$：连续时间函数

T_s：抽样时间间隔

T_1：函数 $x(t)$ 的周期

n：$x(t)$ 的样点序号

$x(nT_s)$：离散时间函数

f：连续频率变量

$X(f)$：$x(t)$ 的傅里叶变换

f_1：抽样频率间隔

f_s：函数 $X(f)$ 的周期

k：$X(f)$ 的样点序号

$X(kf_1)$：离散频率函数

N：在 $0 \leqslant t < T_1$ 之内的抽样数，也等于 $0 \leqslant f < f_s$ 之内的抽样数。

下面将要给出的一些示意图形，着重说明各种组合的不同特点，并非对某一变换对作精确的描述。

（一）连续时间与连续频率

这就是我们熟悉的非周期连续时间信号的频谱，在第三章曾详细研究。

连续时间函数 $x(t)$ 的傅里叶变换 $X(f)$ 可以表示为

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \tag{9-1}$$

逆变换

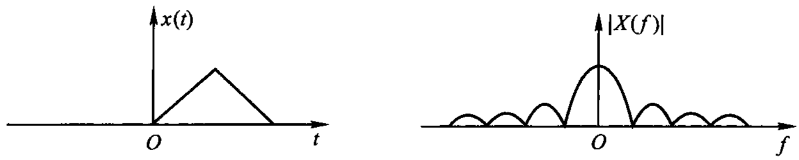
$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \tag{9-2}$$

这种时间函数及其变换函数的形式如图 9-1(a) 所示。这里的 $x(t)$ 或 $X(f)$ 都是连续的，也都是非周期性的。

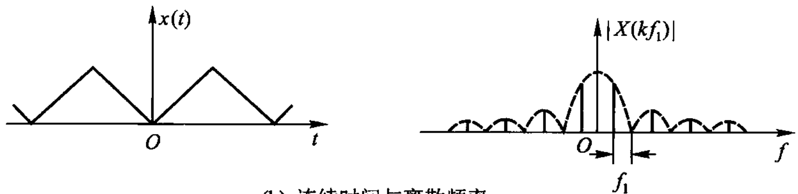
（二）连续时间与离散频率

当连续时间信号为周期函数时，其傅里叶变换具有离散特性，呈冲激序列。在这种情况下，表示信号频谱的另一种方法是写作傅里叶级数的形式。在 3.9

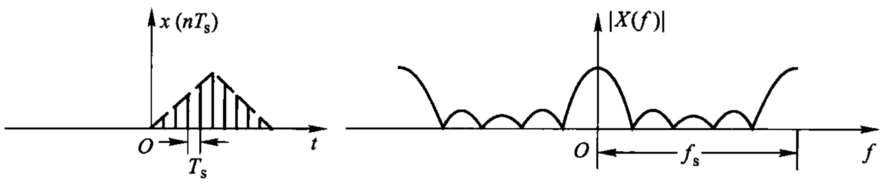
① 参看第三章 3.10 节的例 3-12。



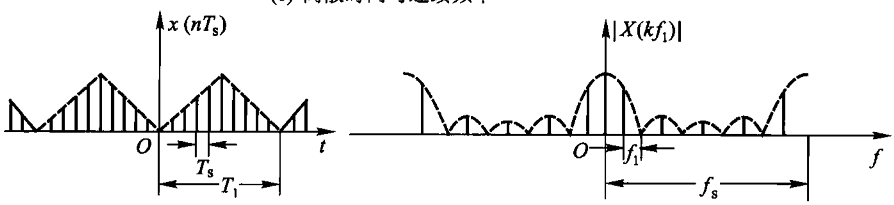
(a) 连续时间与连续频率



(b) 连续时间与离散频率



(c) 离散时间与连续频率



(d) 离散时间与离散频率

图 9－1　傅里叶变换的各种形式

节已经论述了这两种形式的统一性。为便于引出离散傅里叶变换，现在以级数形式写出。令 $x(t)$代表一周期为 T_1 的周期性连续时间函数，傅里叶级数的系数写作 $X(kf_1)$。这组变换对是

$$X(kf_1)=\frac{1}{T_1}\int_{T_1} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi kf_1 t}\mathrm{d}t \tag{9-3}$$

和

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(kf_1)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi kf_1 t} \tag{9-4}$$

注意，式(9－3)的积分限是取 $x(t)$的一个周期。k 为谐波序号，而频率间隔 f_1 与时间周期 T_1 之间满足

$$f_1=\frac{1}{T_1}$$

两函数的特性示于图 9-1(b),结论是:周期性的连续时间函数对应于非周期性的离散频率变换函数。

(三) 离散时间与连续频率

非周期性的离散时间函数 $x(nT_s)$的变换式呈周期性的连续函数,写作$X(f)$,如图 9-1(c)所示。一般情况下,在 8.9 节给出的 DTFT 就是这种情况。此时,正变换式为级数求和,逆变换是求积分,构成与式(9-3)和式(9-4)对称的函数式

$$X(f)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT_s)e^{-j2\pi nfT_s} \tag{9-5}$$

和

$$x(nT_s)=\frac{1}{f_s}\int_{f_s}X(f)e^{j2\pi nfT_s}df \tag{9-6}$$

与前面类似,式(9-6)的积分限是取 $X(f)$的一个周期。n 为离散时间函数的样点序号,而时间间隔 T_s 与频率特性的重复周期 f_s 之间满足

$$f_s=\frac{1}{T_s}$$

这种情况的特性与第(二)种情况呈对偶关系,这就是:非周期的离散时间函数对应于周期性的连续频率变换函数。

(四) 离散时间与离散频率

这是本节的主题,将从这种情况引出离散傅里叶级数与变换的概念。

图 9-1(d)所示周期性离散时间函数 $x(nT_s)$的傅里叶变换是周期性离散频率函数 $X(kf_1)$,也示于图 9-1(d)之中。可从上述非周期离散时间函数或周期连续时间函数两种情况中的任一种,经修改导出这里所需的变换对。例如,借助式(9-5)与式(9-6)。现在,由于时间函数也呈周期性,故级数取和应限制在一个周期之内,序号 n 从 0 到 $N-1$,于是有

$$X(kf_1)=\sum_{n=0}^{N-1}x(nT_s)e^{-j2\pi nkT_sf_1} \tag{9-7}$$

注意,时间函数的周期性导致频率函数的离散性,故变量 f 代之以 kf_1,式(9-6)中的符号随之作如下演变:

$$df\to f_1=\frac{f_s}{N},f\to kf_1,\int_{f_s}\to\sum_{k=0}^{N-1}$$,于是得到

$$\begin{aligned}x(nT_s)&=\frac{1}{f_s}\sum_{k=0}^{N-1}X(kf_1)e^{j2\pi nkT_sf_1}\frac{f_s}{N}\\&=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(kf_1)e^{j2\pi nkT_sf_1}\end{aligned} \tag{9-8}$$

这里，离散时间函数的时间间隔 T_s 与频率函数的重复周期 f_s 之间满足 $f_s = \frac{1}{T_s}$，而离散频率函数的间隔 f_1 与时间函数周期 T_1 的关系是 $f_1 = \frac{1}{T_1}$。此外，在时域、频域各自的一个周期内分别有如下关系：

$$\frac{T_1}{T_s} = N \quad 或 \quad \frac{f_s}{f_1} = N \tag{9-9}$$

即每个周期有 N 个样点。容易求得

$$T_s f_1 = \frac{1}{N} \tag{9-10}$$

或

$$T_1 f_s = N \tag{9-11}$$

将式(9－10)代入式(9－7)与式(9－8)得到

$$X(kf_1) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_s) e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk} \tag{9-12}$$

$$x(nT_s) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(kf_1) e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk} \tag{9-13}$$

式(9－12)与式(9－13)构成级数形式的变换对。它们是图 9－1(d)所示函数图形的数学描述。

类似地，以上述第(二)种情况为基础，即利用式(9－3)与式(9－4)，经修改也可得到如式(9－12)和式(9－13)这样的变换对，但 1/N 将从式(9－13)移至式(9－12)。显然，此系数的变动是无关紧要的，它不会改变这一对变换函数图形的基本形状。

为了证实刚刚导出的变换对之合理性，把式(9－12)代入式(9－13)，如果能使等式左右两端相等，即可相信这一对关系式是正确的。

依此写出

$$x(nT_s) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[\sum_{n=0}^{N-1} x(nT_s) e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk}\right] e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk} \tag{9-14}$$

为了防止两次取和使宗量 n 引起混淆，引用符号 m，式(9－14)改写为

$$\begin{aligned} x(mT_s) &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[\sum_{n=0}^{N-1} x(nT_s) e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk}\right] e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)mk} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(nT_s) \sum_{k=0}^{N-1} e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)(m-n)} \end{aligned} \tag{9-15}$$

式中第二次取和有如下的几何级数形式①

① 见附录四：几何级数的求值公式表。

$$\sum_{k=0}^{N-1} G^k = \begin{cases} \dfrac{1-G^N}{1-G} & (G \neq 1) \\ N & (G=1) \end{cases} \tag{9-16}$$

这里

$$G = e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)(m-n)}$$

因为 $m-n$ 是整数,所以有

$$G^N = 1$$

当 $m \neq n$ 时,由于 $G^N=1$ 而 $G \neq 1$,于是得到

$$\sum_{k=0}^{N-1} G^k = 0$$

当 $m=n$ 时,$G^N=1$,且 $G=1$,可以得到

$$\sum_{k=0}^{N-1} G^k = N$$

因此,在式(9-15)两次取和过程中,m 与 n 的各种组合仅在 $n=m$ 时取得 N 值,其余各项均为零,于是,式(9-15)右端得到

$$\frac{1}{N} \cdot N \cdot x(nT_s) = x(nT_s) \tag{9-17}$$

显然,等式左端的宗数 m 与右端的 n 含义相同,故两边都是 $x(nT_s)$,至此,变换对的正确性得到证实。

以上四种情况讨论的结果概括写于表 9-1。其中最后一种情况,也即式(9-12)与式(9-13)组成的变换对,正是离散傅里叶变换的雏形,下面两节继续讨论。

表 9-1 傅里叶变换的四种组合形式

时域 \ 频域	连 续	离 散
连续	$X(f)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt$ $x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df$ 时域、频域都为非周期、连续	$X(f)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)e^{-j2\pi nfT_s}$ $x(nT_s)=\frac{1}{f_s}\int_{f_s} X(f)e^{j2\pi nfT_s}df$ 时域非周期、离散 频域周期、连续

续表

时域＼频域	连　续	离　散
离散	$X(kf_1)=\frac{1}{T_1}\int_{T_1}x(t)e^{-j2\pi kf_1 t}dt$ $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(kf_1)e^{j2\pi kf_1 t}$ 时域周期、连续 频域非周期、离散	$X(kf_1)=\sum_{n=0}^{N-1}x(nT_s)e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk}$ $x(nT_s)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(kf_1)e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk}$ 时域、频域都为周期、离散

9.3　从离散傅里叶级数到离散傅里叶变换

在前节分析的基础上，把离散傅里叶级数作为一种过渡形式，由此引出离散傅里叶变换。下面就要看到，离散傅里叶级数用于分析周期序列，而离散傅里叶变换则是针对有限长序列。

为便于在以后讨论中区分周期序列和有限长序列，用带有下标 p 的符号来表示周期性序列，例如 $x_p(n)$，$y_p(n)$等。

若周期序列 $x_p(n)$的周期为 N，那么

$$x_p(n)=x_p(n+rN)\qquad (r\text{ 为任意整数})$$

周期序列不能进行双边 z 变换，因为当 n 从 $-\infty$到∞变化，序列周而复始，永不衰减，在 z 平面上任何地方也找不到一个衰减因子$|z|$能使 $x_p(n)z^{-n}$绝对可和，它在 z 平面上不存在收敛域，故无 z 变换。这正如在连续时间系统中，周期信号不存在双边拉氏变换。然而，连续时间周期信号可以用傅里叶级数来表达，与此相应，周期序列也可用离散傅里叶级数来表示。定义如下的离散傅里叶级数变换对

$$\begin{cases} X_p(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x_p(n)e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk} & (9-18)\\ x_p(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X_p(k)e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk} & (9-19)\end{cases}$$

显然，这就是前节的式(9－12)与式(9－13)，只是这里取时间变量的离散间隔 T_s 以及频率变量的离散间隔 f_1 都等于 1，使表达式简化。对于式(9－19)作如下解释：式中 $e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$是周期序列的基频成分，$e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk}$就是 k 次谐波分量，各次

谐波的系数为 $X_p(k)$；全部谐波成分中只有 N 个是独立的，因为

$$e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)n(k+N)}=e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk} \tag{9-20}$$

因此，级数取和的项数是从 $k=0$ 到 $N-1$，共 N 个独立谐波分量。而式(9-18)正是由 $x_p(n)$决定系数 $X_p(k)$的求和公式。由于时域、频域的双重周期性，就使两个式子具有对称的形式，都是 N 项级数取和再构成 N 个样点的序列。周期序列虽然是无穷长序列，但是只要知道了一个周期的内容，其余时刻的全部情况即可掌握。这意味着，周期性无穷长序列实际上只有 N 个样值有信息，式(9-18)与式(9-19)都只取 N 个样点正说明了这种含义。因此，周期序列与有限长序列有着本质的联系，这正是由离散傅里叶级数向离散傅里叶变换过渡的关键所在。

为今后研究的方便，引入符号 W_N

$$W_N=e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)} \tag{9-21}$$

如果在所讨论的问题中不涉及 N 的变动，可省略下标，简写作

$$W=e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)} \tag{9-22}$$

此外，用英文缩写字母 DFS[·]表示取离散傅里叶级数的正变换(求系数)，以 IDFS[·]表示取离散傅里叶级数的逆变换(求时间函数)。这样，把离散傅里叶级数的变换对写作

$$\mathrm{DFS}[x_p(n)]=X_p(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x_p(n)W^{nk} \tag{9-23}$$

$$\mathrm{IDFS}[X_p(k)]=x_p(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X_p(k)W^{-nk} \tag{9-24}$$

现在借助周期序列离散傅里叶级数的概念对有限长序列进行傅里叶分析。

设 $x(n)$为有限长序列，它在 $n=0$ 到 $N-1$ 共 N 个样点上取某些数值，其余各处皆为零

$$x(n)=\begin{cases}x(n) & (0\leqslant n\leqslant N-1)\\ 0 & (n\text{ 为其他值})\end{cases} \tag{9-25}$$

为了引用周期序列的有关概念，假定一个周期序列 $x_p(n)$，它是以 N 为周期将有限长序列 $x(n)$延拓而成，因此 $x(n)$与 $x_p(n)$之间的关系可表示为

$$x_p(n)=\sum_{r}x(n+rN)\quad(r\text{ 取整数}) \tag{9-26}$$

或

$$x(n)=\begin{cases}x_p(n) & (0\leqslant n\leqslant N-1)\\ 0 & (n\text{ 为其他值})\end{cases} \tag{9-27}$$

图 9-2 表明了 $x(n)$与 $x_p(n)$的对应关系。

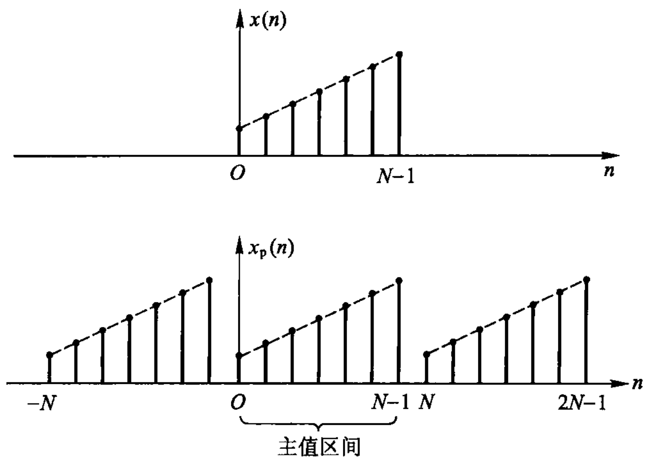


图 9-2 有限长序列的周期延拓

对于周期序列 $x_p(n)$,定义它的第一个周期 $n=0$ 到 $N-1$ 的范围为"主值区间"。于是,$x(n)$与 $x_p(n)$的关系可以解释为:$x_p(n)$是 $x(n)$的周期延拓,$x(n)$是 $x_p(n)$的主值区间序列(简称主值序列)。

为书写简便,将式(9-26)与式(9-27)改用以下符号表示:

$$x_p(n)=x((n))_N \tag{9-28}$$

$$x(n)=x_p(n)R_N(n) \tag{9-29}$$

这里,式(9-29)中的 $R_N(n)$是矩形脉冲序列 $R_N(n)=u(n)-u(n-N)$,将它与 $x_p(n)$相乘表示取 $x_p(n)$之主值序列,得到 $x(n)$。而式(9-28)中的符号$((n))_N$ 表示"n 对 N 取模值",或称"余数运算表达式"。若

$$n=n_1+rN \quad (0\leqslant n_1\leqslant N-1, r \text{ 为整数})$$

则

$$((n))_N=(n_1)$$

$$x((n))_N=x(n_1)$$

它表明,此运算符号要求将 n 被 N 除,整数商为 r,余数是 n_1,此(n_1)就是$((n))_N$的解。显然,对于周期序列有

$$x_p(rN+n_1)=x_p(n_1)$$

这里,$x_p(n_1)$是主值区间的样值,因此

$$x_p(n_1)=x(n_1)$$

$$x_p(n)=x((n))_N$$

例如,若 $x_p(n)$是周期 $N=5$ 的序列,对于 $n=19$,则有

$$x_p(19)=x_p(4)=x(4)$$

这是由于

$$19=3\times5+4$$

故

$$((19))_5=(4)$$

由于 $x_p(n)$的变换式 $X_p(k)$也呈周期性,因此,也可为它确定主值区间 $(0\leqslant k\leqslant N-1)$,其主值序列 $X(k)$相当于某一有限长序列。类似地,可以写出

$$X(k)=X_p(k)R_N(k) \tag{9-30}$$

$$X_p(k)=X((k))_N \tag{9-31}$$

考察式(9-23)与式(9-24),容易看出,这两个公式的求和都只限于主值区间,因而这种变换方法可以引申到与主值序列相应的有限长序列。

现在给出有限长序列离散傅里叶变换的定义。设有限长序列 $x(n)$长度为 N(在 $0\leqslant n\leqslant N-1$ 范围内),它的离散傅里叶变换 $X(k)$仍然是一个长度为 N(在 $0\leqslant k\leqslant N-1$ 范围内)的频域有限长序列,正、逆变换的关系式为

$$\begin{cases} X(k)=\mathrm{DFT}[x(n)]=\sum\limits_{n=0}^{N-1}x(n)W^{nk} \\ \qquad (0\leqslant k\leqslant N-1) & (9-32) \\ x(n)=\mathrm{IDFT}[X(k)]=\dfrac{1}{N}\sum\limits_{k=0}^{N-1}X(k)W^{-nk} \\ \qquad (0\leqslant n\leqslant N-1) & (9-33) \end{cases}$$

式中符号 DFT[·]表示取离散傅里叶正变换,IDFT[·]表示取离散傅里叶逆变换。

比较 DFT 变换对与 DFS 变换对的表示式不难发现,只要把 $x(n)$,$X(k)$分别理解为 $x_p(n)$,$X_p(k)$的主值序列,那么,两种变换对的表示式就完全相同。实际上,DFS 是按傅里叶分析严格定义的,而我们规定的 DFT 是一种“借用”的形式。由前节研究已知,有限长序列 $x(n)$是非周期性的,故其傅里叶变换应当是连续、周期性的频率函数;现在,人为地把 $x(n)$周期延拓构成 $x_p(n)$,使 $x(n)$充当其主值序列,于是 $x_p(n)$的变换式 $X_p(k)$就成为离散、周期性的频率函数,借用 $X_p(k)$的主值序列 $X(k)$定义为“离散傅里叶变换(DFT)”。这样做的目的正是为了使傅里叶分析可以利用数字计算机,在 9.6 节和 9.7 节将讨论这方面的实现与应用问题。

式(9-32)与式(9-33)也可以写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & \cdots & W^0 \\ W^0 & W^{1\times 1} & W^{2\times 1} & \cdots & W^{(N-1)\times 1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ W^0 & W^{1\times(N-1)} & W^{2\times(N-1)} & \cdots & W^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix} \tag{9-34}$$

和

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & \cdots & W^0 \\ W^0 & W^{-1\times 1} & W^{-1\times 2} & \cdots & W^{-1\times(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ W^0 & W^{-(N-1)\times 1} & W^{-(N-1)\times 2} & \cdots & W^{-(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix} \tag{9-35}$$

简写作

$$\boldsymbol{X}(k) = \boldsymbol{W}^{nk}\boldsymbol{x}(n) \tag{9-36}$$

$$\boldsymbol{x}(n) = \frac{1}{N}\boldsymbol{W}^{-nk}\boldsymbol{X}(k) \tag{9-37}$$

此处，$\boldsymbol{X}(k)$与$\boldsymbol{x}(n)$分别为 N 列的列矩阵，元素写作 $X(0)\quad\cdots\quad X(N-1)$以及$x(0)\quad\cdots\quad x(N-1)$。而 $\boldsymbol{W}^{nk}$与$\boldsymbol{W}^{-nk}$(注意 $W=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}}$)分别为 $N\times N$ 方阵，其中各元素分别以 W^{nk}或 W^{-nk}表示，这两个方阵都是对称矩阵，即

$$\boldsymbol{W}^{nk} = [\boldsymbol{W}^{nk}]^{\mathrm{T}} \tag{9-38}$$

$$\boldsymbol{W}^{-nk} = [\boldsymbol{W}^{-nk}]^{\mathrm{T}} \tag{9-39}$$

例 9-1 求矩形脉冲序列 $x(n)=R_N(n)$的 DFT。

解

由定义写出

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} R_N(n) W^{nk} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} W^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi k}{N}}\right)^n \\ &= \begin{cases} \dfrac{1-\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi k}{N}}\right)^N}{1-\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi k}{N}}\right)} & (\text{当 } \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi k}{N}} \neq 1) \\ N & (\text{当 } \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi k}{N}} = 1) \end{cases} \end{aligned}$$

当 $k=0$ 时，对应 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi k}{N}}=1$，因此 $X(0)=N$。当 $k=1,2,3,\cdots,N-1$ 时，则有 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi k}{N}}\neq 1$，然而，$\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi k}{N}}\right)^N=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi k}=1$，故对应非零之 k 值 $X(k)$全部等于零，即

$$X(1)=X(2)=\cdots=X(N-1)=0$$

此结果表明,矩形脉冲序列的 DFT 仅在 $k=0$ 样点取得 N 值,在其余($N-1$)个样点都是零。可以写作

$$X(k)=N\delta(k)$$

不难想到,将 $R_N(n)$周期延拓(周期等于 N)成为无始无终幅度恒为单位值的序列,取离散傅里叶级数即 $N\delta(k)$。这种现象犹如在连续时间系统分析中的直流信号其傅氏变换是冲激函数。

例 9-2 利用矩阵表示式求 $x(n)=R_4(n)$的 DFT。再由所得 $X(k)$经 IDFT 反求 $x(n)$,验证结果之正确性。

解

由 $N=4$ 得到 $W=e^{-j\frac{2\pi}{4}}=-j$

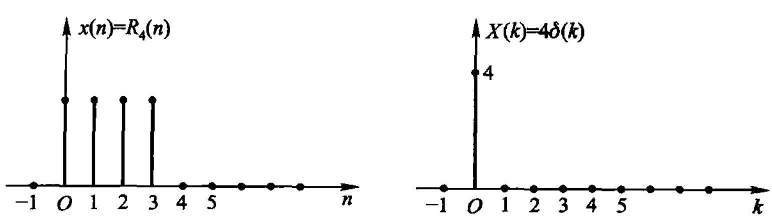
$$\begin{bmatrix}X(0)\\X(1)\\X(2)\\X(3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}W^0 & W^0 & W^0 & W^0\\W^0 & W^1 & W^2 & W^3\\W^0 & W^2 & W^4 & W^6\\W^0 & W^3 & W^6 & W^9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(0)\\x(1)\\x(2)\\x(3)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\1 & -j & -1 & j\\1 & -1 & 1 & -1\\1 & j & -1 & -j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

显然,此结果与例 9-1 的一般结论相符合,再求逆变换

$$\begin{bmatrix}x(0)\\x(1)\\x(2)\\x(3)\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}W^0 & W^0 & W^0 & W^0\\W^0 & W^{-1} & W^{-2} & W^{-3}\\W^0 & W^{-2} & W^{-4} & W^{-6}\\W^0 & W^{-3} & W^{-6} & W^{-9}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\0\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$$

以图形表示本例之结果见图 9-3。



(a) $x(n)$图形　　(b) $X(k)$图形

图 9-3 例 9-2 的图形表示

9.4 离散傅里叶变换的性质

(一) 线性

若

$$X(k)=\mathrm{DFT}[x(n)]$$

$$Y(k)=\mathrm{DFT}[y(n)]$$

则

$$\mathrm{DFT}[ax(n)+by(n)]=aX(k)+bY(k)$$

式中 a,b 为任意常数,证明从略。

(二) 时移特性

为便于研究有限长序列的位移特性,建立"圆周移位"的概念。

若有限长序列 $x(n)$位于 $0\leqslant n\leqslant N-1$ 区间,经时移 m 位,序列 $x(n-m)$ 仍为有限长,但其位置移至 $m\leqslant n\leqslant N+m-1$,如图 9-4 所示。若将这两个序列分别取 DFT,那么,它们的级数取和范围出现差异,前者从 0 到$(N-1)$,后者应改为从 m 到 $N+m-1$,当时移位数不同时,DFT 取和范围要随之改变。这种现象给位移序列 DFT 之研究带来不便。为解决此矛盾,把有限长序列的位移赋予一种新的解释:先将 $x(n)$周期延拓构成 $x_p(n)$,然后移 m 位得到 $x_p(n-m)$,见图 9-5(a),最后,取 $x_p(n-m)$之主值,这样就得到了$x(n)$的所谓圆周移位序列 $x_p(n-m)R_N(n)$。有限长序列 $x(n)$的圆周移位序列一般写作

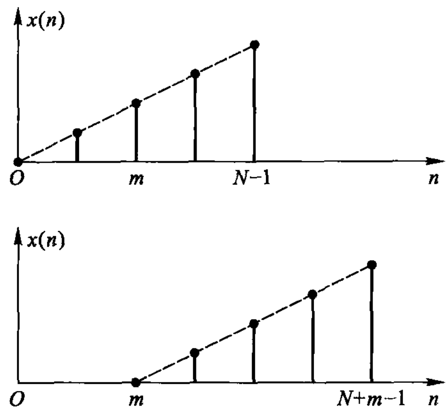


图 9-4 有限长序列的移位

$$x((n-m))_N R_N(n)$$

图 9-5(b)示出,$N=5$ 的有限长序列 $x(n)$,经圆周移位得到 $x((n-2))_5R_5(n)$的情形。当序列 $x(n)$向右移 m 位时,超出 $N-1$ 以外的 m 个样值又从左边依次填补了空位,因此,可以想象,序列 $x(n)$排列在一个 N 等分的圆周上,N 个样点首尾相接,圆周移 m 个单位表示 $x(n)$在圆周上旋转 m 位。圆周移位也可称为循环移位,或简称圆移位。当有限长序列进行任意位数的圆移位时,它们的 DFT 取值范围仍保持从 0 到 $N-1$ 不改变。

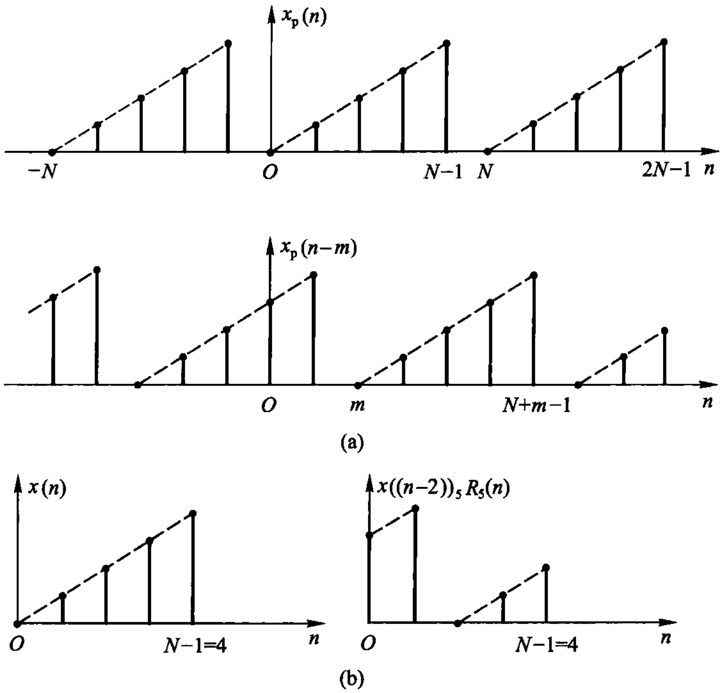


图 9-5 有限长序列的圆周移位

现在说明时移特性的定理内容：

若

$$\mathrm{DFT}[x(n)] = X(k)$$

$$y(n) = x((n-m))_N R_N(n) \qquad (\text{圆移 } m \text{ 位})$$

则

$$\mathrm{DFT}[y(n)] = W^{mk}X(k) \tag{9-40}$$

这表明，时移 $-m$ 位，其 DFT 将出现相移因子 W^{mk}。证明如下：

$$\begin{aligned}\mathrm{DFT}[y(n)] &= \mathrm{DFT}[x((n-m))_N R_N(n)] \\ &= \mathrm{DFT}[x_p(n-m)R_N(n)] \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n-m)W^{nk}\end{aligned}$$

设 $i = n - m$，经换元得到

$$\begin{aligned}\mathrm{DFT}[y(n)] &= \sum_{i=-m}^{N-m-1} x_p(i)W^{(i+m)k} \\ &= \left[\sum_{i=-m}^{N-m-1} x_p(i)W^{ik}\right]W^{mk}\end{aligned}$$

由于 $x_p(i)$和 W^{ik}都是以 N 为周期的周期性函数，因而，式中方括号内求和范围可改从 $i=0$ 到 $i=N-1$，显然，这部分可简化为

$$\begin{aligned}\sum_{i=-m}^{N-m-1} x_p(i) W^{ik} &= \sum_{i=0}^{N-1} x_p(i) W^{ik} \\ &= \mathrm{DFT}[x(n)] \\ &= X(k)\end{aligned}$$

于是可以写出

$$\mathrm{DFT}[y(n)] = W^{mk} X(k)$$

(三) 频移特性

若

$$\mathrm{DFT}[x(n)] = X(k)$$

$$Y(k) = X((k-l))_N R_N(k)$$

则

$$\mathrm{IDFT}[Y(k)] = x(n) W^{-ln} \tag{9-41}$$

此定理表明，若时间函数乘以指数项 W^{-ln}，则离散傅里叶变换就向右圆移 l 单位。这可以看作调制信号的频谱搬移，也称“调制定理”。本定理证明留给读者作为习题(见习题 9－13 与习题 9－14)。

(四) 时域圆周卷积(圆卷积)

若

$$Y(k) = X(k) H(k)$$

则

$$\begin{aligned}y(n) &= \mathrm{IDFT}[Y(k)] \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x(m) h((n-m))_N R_N(n) \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} h(m) x((n-m))_N R_N(n)\end{aligned} \tag{9-42}$$

其中 $Y(k)$，$X(k)$，$H(k)$之 IDFT 分别等于 $y(n)$，$x(n)$，$h(n)$。

证明

$$\begin{aligned}\mathrm{IDFT}[Y(k)] &= \mathrm{IDFT}[X(k) H(k)] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) H(k) W^{-nk} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{m=0}^{N-1} x(m) W^{mk} \right] H(k) W^{-nk} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x(m) \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) W^{mk} W^{-nk} \right]\end{aligned}$$

上式最后一行方括号部分相当于求 $H(k) W^{mk}$的 IDFT，引用时移定理，这部分可写作 $h((n-m))_N R_N(n)$，于是得到

$$y(n)=\sum_{m=0}^{N-1}x(m)h((n-m))_N R_N(n)$$

同理也可证明

$$y(n)=\sum_{m=0}^{N-1}h(m)x((n-m))_N R_N(n)$$

此卷积过程只在 $0\leqslant m\leqslant N-1$ 区间内进行，若 $x(m)$保持不移动，则 $h((n-m))_N$ 相当于 $h(-m)$的圆移位，因而把这种卷积称作“圆周卷积”或“圆卷积”。显然，此前介绍的卷积是作平移，而非圆移，称那种情况为“线卷积”，以示与此处之圆卷积区分。圆卷积的符号以⊛表示

$$\begin{aligned}x(n)\circledast h(n)&=\sum_{m=0}^{N-1}x(m)h((n-m))_N R_N(n)\\&=\sum_{m=0}^{N-1}h(m)x((n-m))_N R_N(n)\end{aligned}\qquad(9-43)$$

圆卷积的图解分析可按照反褶、圆移、相乘、求和的步骤进行。下面举例说明。

例 9-3 图 9-6 示出两个有限长序列

$$x(n)=(n+1)R_4(n)$$

$$h(n)=(4-n)R_4(n)$$

试用作图方法求圆卷积 $y(n)=x(n)\circledast h(n)$。

解 将 $x(n),h(n)$变量置换，分别写作 $x(m),h(m)$。

由$h(m)$作出$h((0-m))_4R_4(m)$，$h((1-m))_4R_4(m)$，$h((2-m))_4R_4(m)$以及 $h((3-m))_4R_4(m)$，绘于图 9-6 之中。

依次将 $h((n-m))_4$ 与 $x(m)$相乘、求和得到

$$y(0)=(1\times4)+(2\times1)+(3\times2)+(4\times3)=24$$

$$y(1)=(1\times3)+(2\times4)+(3\times1)+(4\times2)=22$$

$$y(2)=(1\times2)+(2\times3)+(3\times4)+(4\times1)=24$$

$$y(3)=(1\times1)+(2\times2)+(3\times3)+(4\times4)=30$$

最后写出

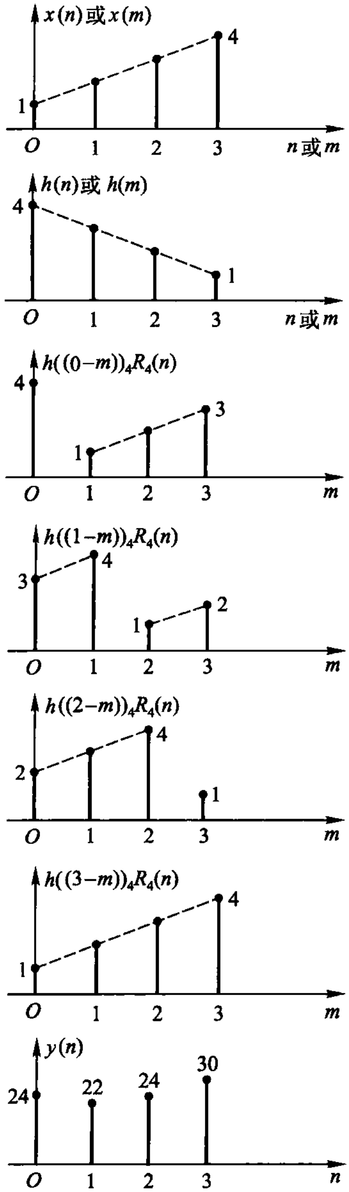
$$y(n)=24\delta(n)+22\delta(n-1)+24\delta(n-2)+30\delta(n-3)$$

建议利用本例题之结果，分别求$x(n)$，$h(n)$和$y(n)$的 DFT 得到$X(k)$，$H(k)$，$Y(k)$，验证圆卷积定理(习题 9-15)。

下面讨论有限长序列线卷积和圆卷积的区别与联系。

设有限长序列 $x(n)$，$h(n)$的长度分别为 N 和 M，它们的线卷积 $y(n)=x(n)*h(n)$也应当是有限长序列。由定义知

$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)\qquad(9-44)$$



$x(m)$	1	2	3	4	
$h((0-m))_4$	4	1	2	3	
相乘	4	2	6	12	取和24

$x(m)$	1	2	3	4	
$h((1-m))_4$	3	4	1	2	
相乘	3	8	3	8	取和22

$x(m)$	1	2	3	4	
$h((2-m))_4$	2	3	4	1	
相乘	2	6	12	4	取和24

$x(m)$	1	2	3	4	
$h((3-m))_4$	1	2	3	4	
相乘	1	4	9	16	取和30

图 9－6　有限长序列圆卷积之图解(例 9－3)

已知 $x(m)$的非零值区间是

$$0\leqslant m\leqslant N-1$$

从 $h(n-m)$看,非零值区间位于

$$0 \leqslant n - m \leqslant M - 1$$

联解这两个不等式，得到

$$0 \leqslant n \leqslant N + M - 2 \tag{9-45}$$

在式(9-45)区间之外不是 $x(m)$ 为零就是 $y(n-m)$ 等于零，都将造成 $y(n)=0$。因此，$y(n)$ 是一个长度等于 $N+M-1$ 的有限长序列。例如图 9-7(a)中，$x(n)$ 是 $N=4$ 的矩形序列，$h(n)$ 是 $M=6$ 的矩形序列，二者的线卷积 $y(n)$ 长度是 $N+M-1=9$。

再看圆卷积。两个有限长序列进行圆卷积时，必须规定它们的长度相等。经圆卷积后所得序列长度仍与原序列长相同。如果两序列长度不等，可将较短的一个补一些零点，构成两个等长序列再作圆卷积。图 9-7(b)示出这种情况，此图中，$x(n)$，$y(n)$ 仍与图 9-7(a)相同。然而，很明显，圆卷积之结果与线卷积完全不同。出现这种差异的实质是：线卷积过程中，经反褶再向右平移的序列，在左端将依次留出空位，而圆卷积过程中，经反褶作圆移的序列，向右移去的样值又从左端循环出现，这样就使两种情况下相乘、叠加而得之数值截然不同。

如果把序列 $x(n)$，$h(n)$ 都适当地补一些零值，以扩展其长度，那么，在作圆卷积时，向右移去的零值，从左端出现仍取零值，这样，就与线卷积的情况相同，两种卷积的结果有可能一致。补零扩展以后的长度 L 不应小于前面求得之线卷积序列长度 $M+N-1$，也即满足

$$L \geqslant N + M - 1 \tag{9-46}$$

的条件下，圆卷积与线卷积结果一致。图 9-7(c)示出长度 $N=4$ 的序列 $x(n)$ 与长度 $M=6$ 的序列 $h(n)$ 都经补零扩展至 $L=4+6-1=9$，再作圆卷积与线卷积之结果[图 9-7(a)]完全相同。

在图 9-7(d)中，$x(n)$，$h(n)$ 虽扩展至 $L=8$，但因为 $L<N+M-1$，故圆卷积之结果与线卷积还是不一样。比较图 9-7(d)与图 9-7(a)不难发现，将线卷积 $n=8$ 处之样值 1 移到 $n=0$ 与该处样值 1 相加，就与图 9-7(d)完全相同，这可以看做一种混叠现象，由于 L 不够长，使线卷积之首尾交叠混淆成为图 9-7(d)或图 9-7(b)那样的圆卷积。当 $L \geqslant N+M-1$ 时，就可避免混叠，圆卷积与线卷积一致。

一般情况下，信号 $x(n)$ 通过单位样值响应为 $h(n)$ 的系统，其输出是线卷积 $y(n)=x(n)*h(n)$。然而，在卷积的计算方面，圆卷积可借助快速傅里叶变换(FFT)技术(详见 9.6 节与 9.7 节)，以较高的速度完成运算。因此，对于有限长序列求线卷积的问题，可以按上面的分析[满足式(9-46)]，把线卷积转化为圆卷积，以便利用 FFT 技术，提高计算速度。

(五) 频域圆卷积

若

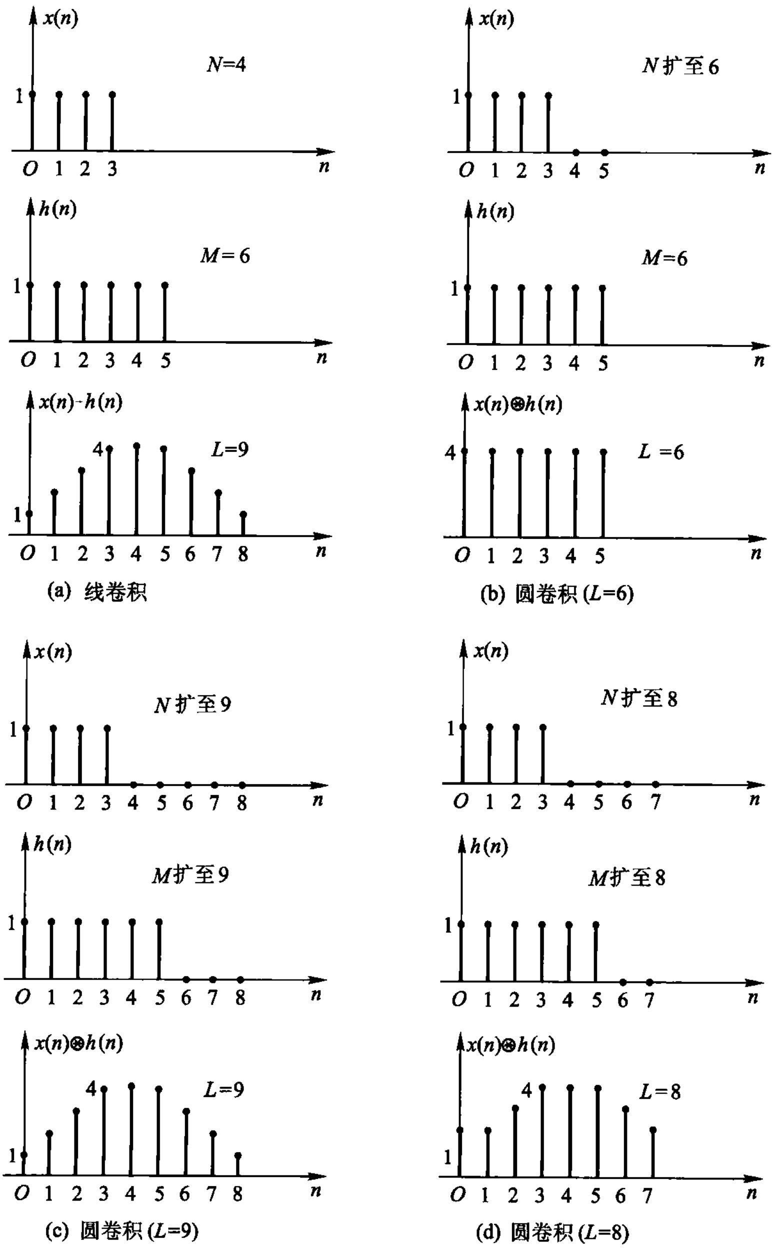


图 9－7 线卷积与圆卷积比较

$$y(n)=x(n)h(n)$$

则

$$Y(k)=\mathrm{DFT}[y(n)]=\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}X(l)H((k-l))_N R_N(k)$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}H(l)X((k-l))_N R_N(k) \tag{9-47}$$

证明方法与时域圆卷积类似。

(六) 奇偶虚实性

设 $x(n)$为实序列,DFT$[x(n)]=X(k)$,令

$$X(k)=X_r(k)+\mathrm{j}X_i(k) \tag{9-48}$$

这里,$X_r(k)$是 $X(k)$的实部,$X_i(k)$是它的虚部,由 DFT 的定义写出

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\cos\left[\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk\right]-\mathrm{j}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\sin\left[\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk\right] \tag{9-49}$$

式(9-48)与式(9-49)的实部、虚部对应相等,于是有

$$X_r(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\cos\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) \tag{9-50}$$

$$X_i(k)=-\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\sin\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) \tag{9-51}$$

显然,由于 $X_r(k)$和 $X_i(k)$分别由余弦和正弦函数构成,前者应为 k 的偶函数,后者为奇函数。必须指出,这里所谓的偶函数和奇函数都应理解为将$X(k)$周期延拓而具有周期重复性。如果认为 DFT 的定义仅限于 0 到 $N-1$ 范围,那么它的奇、偶特性都应以$\frac{N}{2}$为对称中心。在以下讨论中对奇、偶含义的理解都遵从此规律。

以上分析表明:实数序列的离散傅里叶变换为复数,其实部是偶函数,虚部为奇函数。

如果 $x(n)$为纯虚序列,它的 DFT 写作 $X(k)$,$X(k)$可分解为实部、虚部之和,仍以式(9-48)表示。容易证明,$X_r(k)$是 k 的奇函数,而 $X_i(k)$是 k 的偶函数(习题 9-19)。也即,纯虚数序列的离散傅里叶变换为复数,其实部是奇函数,虚部为偶函数。

进一步的分析指出,若实序列 $x(n)$为 n 的偶函数,则经圆移位再引用式(9-51)可以证得,$X_i(k)=0$,仅留下 $X_r(k)$,且为 k 的偶函数。结论是:实偶函数的 DFT 也为实偶函数。

同理可以证明:实奇函数的 DFT 为虚奇函数。虚偶函数的 DFT 是虚偶函数。而虚奇函数的 DFT 为实奇函数。这些特性全部列于表 9-2 中(参看习题 9-20)。

表 9-2 DFT 的奇偶虚实特性

$x(n)$	$X(k)$	$x(n)$	$X(k)$
实函数	实部为偶、虚部为奇	虚函数	实部为奇、虚部为偶
实偶函数	实偶函数	虚偶函数	虚偶函数
实奇函数	虚奇函数	虚奇函数	实奇函数

表 9-2 中的第一条性质可由如下的表示式说明:

$$X_r(k)=X_r((-k))_N R_N(k) \tag{9-52}$$

$$X_i(k)=-X_i((-k))_N R_N(k) \tag{9-53}$$

也即,对于实数序列,其变换式的实部为 k 的偶函数,虚部为 k 的奇函数,由此可知,$X(k)$与 $X(-k)$呈共轭关系

$$X(k)=X^*((-k))_N R_N(k) \tag{9-54}$$

由于经重复延拓的 $X(k)$具有周期性,故 $X^*((-k))_N R_N(k)=X^*(N-k)$,因此,式(9-54)改写作

$$X(k)=X^*(N-k) \tag{9-55}$$

把共轭关系分别表示为模相等、辐角反号的规律

$$|X(k)|=|X(N-k)| \tag{9-56}$$

$$\arg[X(k)]=-\arg[X(N-k)] \tag{9-57}$$

由式(9-55)至式(9-57)可知,实数序列离散傅里叶变换$X(k)$在 0 至 N 范围内,对于 $N/2$ 点呈对称分布,$|X(k)|$是偶对称,$\arg[X(k)]$是奇对称[注意 $X(N)=X(0)$]。图 9-8 举例示出 $N=8$ 和 $N=7$ 两种情况 $|X(k)|$ 的分布图。如果将 $X(k)$分布在一个 N 等分的圆周上,那么,它就以 $k=0$ 为中心,左、右两半共轭对称。

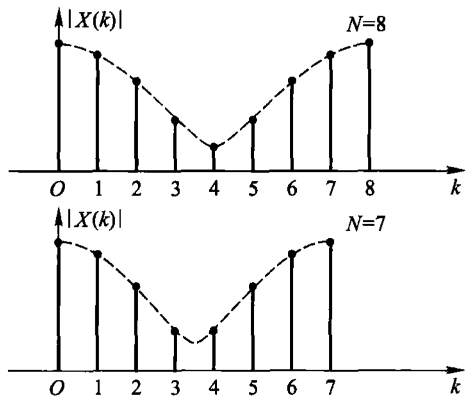


图 9-8 实序列取 DFT 时,$|X(k)|$的对称分布示例

同理可证,对于纯虚序列有如下关系

$$X(k)=-X^*(N-k) \tag{9-58}$$

*(七) 相关特性

与有限长序列的卷积运算类似,它的相关运算也可分为圆相关(循环相关)

与线相关两种形式。通常,可借助圆相关求线相关。

离散傅里叶变换的圆相关定理指出,当序列 $x_1(n)$ 与 $x_2(n)$ 进行互相关运算时,所得 $r_{12}(n)$ 之傅里叶变换 $\mathscr{R}_{12}(k)$ 等于 $X_1(k)$ 与 $X_2^*(k)$ 之乘积,这里 $X_1(k)$ 与 $X_2(k)$ 分别为 $x_1(n)$ 与 $x_2(n)$ 之 DFT,而 $X_2^*(k)$ 是 $X_2(k)$ 之共轭。

$$\begin{cases} r_{12}(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2((m-n))_N R_N(n) \\ \mathscr{R}_{12}(k) = X_1(k) X_2^*(k) \end{cases} \tag{9-59}$$

同理还有以下关系

$$\begin{cases} r_{21}(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_2(m) x_1((m-n))_N R_N(n) \\ \mathscr{R}_{21}(k) = X_2(k) X_1^*(k) \end{cases} \tag{9-60}$$

离散相关特性的图形解释、相关定理的证明都与离散卷积有某些类似之处,读者可练习分析,并与卷积对比。此外,离散相关与连续时间信号的相关运算以及傅里叶变换的相关定理形式上也一一对应。

以上定理按互相关形式给出,如果 $x_1(n) = x_2(n)$,则构成自相关运算。利用自相关特性可进一步推出帕塞瓦尔定理。

(八) 帕塞瓦尔定理

若 $\mathrm{DFT}[x(n)] = X(k)$,则

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2 \tag{9-61}$$

如果 $x(n)$ 为实序列,则有

$$\sum_{n=0}^{N-1} x^2(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2 \tag{9-62}$$

它的证明和物理解释都可仿照连续时间信号的有关分析给出。式(9-62)左端应与有限时间内信号的能量成正比,而右端从频域得到同样的结果,即在一个频域带限之内,功率谱之和与信号的能量成比例。

9.5 离散傅里叶变换与 z 变换的关系

(一) 有限长序列 z 变换的抽样

若有限长序列 $x(n)$ 的长度为 N,其 z 变换表示式应写作

$$X(z) = \mathscr{Z}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n}$$

一般情况下,若有限长序列满足绝对可和条件,则其收敛域包括单位圆在内。在

z 平面，围绕如图 9－9 所示单位圆上的 N 个等间距点计算 z 变换，令 $z=e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)k}$，则

$$X(z)\Big|_{z=e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)k}}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk} \tag{9-63}$$

利用符号 $W=e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)}$，上式改写作

$$X(z)\big|_{z=W^{-k}}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W^{nk}=\text{DFT}[x(n)] \tag{9-64}$$

显然，这里的结果表明，对于序列 $x(n)$ 的 z 变换，抽选 $z=e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)k}$ 这些特定点的样值，即可得到它的离散傅里叶变换。具体地讲，在 z 平面的单位圆上，取辐角为 $\omega=\frac{2\pi}{N}k$ 的等间距第 k 个点，计算其 z 变换，就可得出 DFT$[x(n)]$的第 k 个样值 $X(k)$。因此，有限长序列的 DFT 可解释为它的 z 变换在单位圆上的均匀抽样。

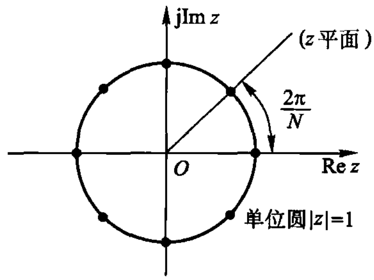


图 9－9　z 平面单位圆上 N 个等间距点

这里必须提醒读者注意，习惯上用 $X(k)$ 和 $X(z)$ 分别表示序列 $x(n)$ 取 DFT 和 ZT。虽然，两种变换式都用符号“X”，但两个函数的形式并不相同，不允许把变量 k 与 z 相互置换，即

$$X(k)\neq X(z)\big|_{z=k}$$

而正确的关系是令 $X(z)$ 式中的 $z=W^{-k}=e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)k}$，即得 $X(k)$

$$X(k)=X(z)\big|_{z=W^{-k}} \tag{9-65}$$

（二）以 DFT$[x(n)]$ 表示 $\mathscr{Z}[x(n)]$

由以上分析可知，对于长度为 N 的有限长序列 $x(n)$，利用其DFT$[x(n)]$ 的 N 个样值——也即从单位圆上取 $X(z)$ 的 N 个样值，就可以正确恢复序列 $x(n)$。显然，也可以从这 N 个样值正确恢复其 z 变换函数 $\mathscr{Z}[x(n)]$。下面导出由 $X(k)$ 确定 $X(z)$ 的表达式。

$$X(z)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)z^{-n} \tag{9-66}$$

式中 $x(n)$ 可利用 IDFT 的形式来表示

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W^{-nk} \tag{9-67}$$

$$X(z)=\sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W^{-nk}\right]z^{-n}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\left(\sum_{n=0}^{N-1}W^{-nk}z^{-n}\right)$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\left(\frac{1-W^{-Nk}z^{-N}}{1-W^{-k}z^{-1}}\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\left(\frac{1}{N}\cdot\frac{1-z^{-N}}{1-W^{-k}z^{-1}}\right) \tag{9-68}$$

注意,此处用到几何级数求和公式以及 W 的性质 $W^{-Nk}=1$。

这就是由单位圆上的抽样点 $X(k)$确定 $X(z)$的表达式,也称“内插公式”,把式中括号部分以符号 $\phi_k(z)$表示,称为“内插函数”。

$$X(z)=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\phi_k(z) \tag{9-69}$$

$$\phi_k(z)=\frac{1}{N}\cdot\frac{1-z^{-N}}{1-W^{-k}z^{-1}} \tag{9-70}$$

$\phi_k(z)$在单位圆的 N 等分点上(也即 N 个抽样点对应的位置)有 $N-1$ 处出现零点,这是因为,式(9-70)分子中 $1-z^{-N}=1-e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)Nk}$项等于零而形成,但在 $W^{-k}=e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)k}$处,分子分母都为零,此时利用洛必达法则可求得 $\phi_k(z)=1$,于是再一次证实了前面已确定的关系式

$$X(z)\Big|_{z=e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)k}}=X(k)$$

(三) 以 DFT[$x(n)$]表示的频响特性

将上面所得 $X(z)$内插表示式中的 z 限于单位圆周,令 $z=e^{j\omega}$,即得以 $X(k)$表示的频响特性

$$X(e^{j\omega})=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\phi_k(e^{j\omega}) \tag{9-71}$$

$$\phi_k(e^{j\omega})=\frac{1}{N}\frac{1-e^{-j\omega N}}{\left[1-e^{-j\left(\omega-\frac{2\pi}{N}k\right)}\right]}$$

$$=\frac{1}{N}\frac{\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{\sin\left[\frac{\left(\omega-k\frac{2\pi}{N}\right)}{2}\right]}e^{-j\left(\frac{N\omega}{2}-\frac{\omega}{2}+\frac{k\pi}{N}\right)} \tag{9-72}$$

为使上式简化,再引入符号

$$\phi(\omega)=\frac{1}{N}\frac{\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)} \tag{9-73}$$

利用式(9－73)可将式(9－72)改写为[①]

$$\phi_k(e^{j\omega}) = \psi\left(\omega - k\frac{2\pi}{N}\right) \tag{9-74}$$

于是得出

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\psi\left(\omega - k\frac{2\pi}{N}\right) \tag{9-75}$$

与式(9－69)的形式类似，式(9－75)就是由单位圆上的抽样点 $X(k)$确定 $X(e^{j\omega})$的内插表示式。此处的内插函数 $\psi(\omega)$的幅度特性与相位特性示于图 9－10(图中 $N=5$)。在 $\omega=0$ 点，$\psi(\omega)=1$，而在 $\omega=k\frac{2\pi}{N}$处($k=1,2,\cdots,N-1$)，$\psi(\omega)=0$。式(9－75)表明，$X(e^{j\omega})$是由 N 个$\psi\left(\omega-k\frac{2\pi}{N}\right)$函数组合而成，其中每个函数的加权值(系数)为 $X(k)$。显然，每个抽样点相应的 $X(e^{j\omega})$就等于该点 $X(k)$值，因为其余各抽样点的内插函数在这里都等于零。样点之间的$X(e^{j\omega})$值则由各内插函数延伸叠加而构成。现在，由频率抽样信号从频域恢复了原信号。顺便指出，此处图 9－10 与前章图 8－14 大体相同。

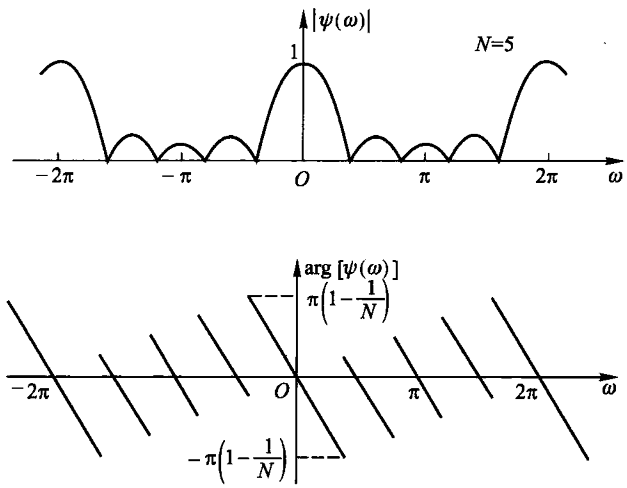


图 9－10　内插函数 $\psi(\omega)$之幅度特性与相位特性

9.6　快速傅里叶变换(FFT)

为了说明 DFT 快速算法构成之原理，下面研究对 $x(n)$取 DFT 变换时，需

① 这里用到 $\sin(\alpha - k\pi) = \mp\sin\alpha$，$e^{jk\pi} = \mp 1$(当 k 为奇数取负号，k 为偶数取正号)。

要多大的计算工作量。

由 DFT 定义式(9－32)或由矩阵形式定义式(9－36)容易看出,将 $x(n)$与 W^{nk}两两相乘再取和即可得到 $X(k)$,每计算一个 $X(k)$值需要进行 N 次复数相乘,和 $N-1$ 次复数相加。对于 N 个 $X(k)$点,应重复 N 次上述运算。因此,要完成全部 DFT 运算共需 N^2 次复数乘法和 $N(N-1)$次复数加法。例如 $N=4$ 的情况,为便于讨论,写出它的矩阵表示式

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix} \tag{9-76}$$

显然,为求得每个 $X(k)$值,需要 $N=4$ 次复数乘法和 $N-1=3$ 次复数加法,要得到 $N=4$ 个 $X(k)$值则需 $N^2=16$ 次复数乘法 $N(N-1)=12$ 次复数加法。

随着 N 值加大,运算工作量将迅速增长,例如 $N=10$ 需要 100 次复数相乘,而当 $N=1\ 024$(即 $N=2^{10}$)时,就需要 1 048 576 即一百多万次复数乘法运算。按照这种规律,如果在 N 较大的情况下,要求对于信号进行实时处理,所需的运算速度就难以实现。

为了改进算法,减少运算工作量,注意到在 W 矩阵中的某些系数是非常简单的。例如,对于 $W^0=1$ 和 $W^{\frac{N}{2}}=-1$,实际上无需作乘法,在 N 较大的情况下,这一因素可使运算工作量略有减少,考虑到系数 W^{nk}的周期性与对称性,合理安排重复出现的相乘运算,将使计算工作量显著减少。现说明如下

(1) W^{nk}的周期性

容易证明

$$W^{nk}=W^{((nk))_N} \tag{9-77}$$

符号$((nk))_N$ 表示取 nk 除以 N 所得之余数,也即 nk 的模 N 运算。例如,对于 $N=4$,可以有 $W^6=W^2$, $W^9=W^1$ 等。

此特性的另一种表达方式为

$$W^{n(N-k)}=W^{-nk} \tag{9-78}$$

$$W^{k(N-n)}=W^{-nk} \tag{9-79}$$

(2) W^{nk}的对称性

因为 $W^{\frac{N}{2}}=-1$,于是得到

$$W^{\left(nk+\frac{N}{2}\right)}=-W^{nk} \tag{9-80}$$

仍以 $N=4$ 为例,有 $W^3=-W^1$ 和 $W^2=-W^0$。

把以上两个特性用于 $N=4$ 的 $\boldsymbol{W}$ 矩阵,得到如下的简化结果

$$\begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^0 & W^2 \\ W^0 & W^3 & W^2 & W^1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & -W^0 & -W^1 \\ W^0 & -W^0 & W^0 & -W^0 \\ W^0 & -W^1 & -W^0 & W^1 \end{bmatrix} \tag{9-81}$$

很明显,经利用周期性与对称性简化之后,$\boldsymbol{W}$ 矩阵中,若干数量的元素雷同,揭示出 DFT 运算中的一个重要现象:$\boldsymbol{W}$ 与 $\boldsymbol{x}(n)$ 相乘过程中,存在着不必要的重复计算。避免这种重复,正是简化运算的关键。

(3) 把N 点 DFT 运算分解为两组$\frac{N}{2}$点的 DFT 运算,然后取和。

下面就来证明这样分解是正确的,而且可以减少运算工作量。

对序列 $x(n)$取 N 点 DFT,假定 N 是 2 的整数次方

$$N=2^M \tag{9-82}$$

其中 M 是正整数。把 $x(n)$的 DFT 运算按 n 为偶数和 n 为奇数分解为两部分(下面将要遇到对不同 N 值取 DFT 运算,为避免符号混淆,把 W 加注长度下标 N,写作 W_N)。

$$\begin{aligned} X(k) &= \mathrm{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} \\ &= \sum_{偶数 n} x(n) W_N^{nk} + \sum_{奇数 n} x(n) W_N^{nk} \end{aligned} \tag{9-83}$$

以符号 $2r$ 表示偶数 n,$2r+1$ 表示奇数 n,r 的范围是 $0,1,\cdots,\frac{N}{2}-1$,有

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r) W_N^{2rk} + \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1) W_N^{(2r+1)k} \\ &= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r)(W_N^2)^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1)(W_N^2)^{rk} \end{aligned} \tag{9-84}$$

式中的 W_N^2 可转换为 $W_{\frac{N}{2}}$,这是因为

$$W_N^2 = \mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\left(\frac{2\pi}{N}\right)} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(\frac{2\pi}{\frac{N}{2}}\right)} = W_{\frac{N}{2}} \tag{9-85}$$

于是式(9-84)写作

$$
\begin{aligned}
X(k) &= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r) W_{\frac{N}{2}}^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1) W_{\frac{N}{2}}^{rk} \\
&= G(k) + W_N^k H(k) \qquad (9-86)
\end{aligned}
$$

式中

$$G(k) = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r) W_{\frac{N}{2}}^{rk} \qquad (9-87)$$

$$H(k) = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1) W_{\frac{N}{2}}^{rk} \qquad (9-88)$$

一个 N 点的 DFT 已被分解为两个 $\frac{N}{2}$ 点的 DFT，但是，必须注意到，$G(k)$ 和 $H(k)$ 只有 $\frac{N}{2}$ 个点，$r=0,1,2,\cdots,\frac{N}{2}-1$，而 $X(k)$ 却需要 N 个点，$k=0,1,2,\cdots,N-1$，如果以 $G(k)$，$H(k)$ 表达全部 $X(k)$，应利用 $G(k)$ 与 $H(k)$ 的两个重复周期。由周期性可知

$$G\left(k+\frac{N}{2}\right) = G(k) \qquad (9-89)$$

$$H\left(k+\frac{N}{2}\right) = H(k) \qquad (9-90)$$

对于式(9－86)中的加权系数 W_N 有

$$W_N^{\left(\frac{N}{2}+k\right)} = W_N^{\frac{N}{2}} \cdot W_N^k = -W_N^k \qquad (9-91)$$

将式(9－89)、式(9－90)、式(9－91)三式代入式(9－86)就可得到由 $G(k)$，$H(k)$ 决定 $X(k)$ 的全部关系式

$$X(k) = G(k) + W_N^k H(k) \qquad (9-92)$$

$$
\begin{aligned}
X\left(\frac{N}{2}+k\right) &= G\left(\frac{N}{2}+k\right) - W_N^k H\left(\frac{N}{2}+k\right) \\
&= G(k) - W_N^k H(k) \qquad (9-93)
\end{aligned}
$$

其中 $k=0,1,\cdots,\frac{N}{2}-1$，式(9－92)与式(9－93)将分别给出 $X(k)$ 的前 $\frac{N}{2}$ 点与后 $\frac{N}{2}$ 点的数值，总共有 N 个值。

为便于理解，再以 $N=4$ 为例说明，此时

$$
\left.
\begin{aligned}
X(0) &= G(0) + W_4^0 H(0) \\
X(1) &= G(1) + W_4^1 H(1) \\
X(2) &= G(0) - W_4^0 H(0) \\
X(3) &= G(1) - W_4^1 H(1)
\end{aligned}
\right\} \qquad (9-94)
$$

可用“流程图”来表达式(9-94)的运算,如图 9-11 右半部分所示,自左向右进行运算,两条线的汇合点表示两数值相加,线旁标注加权系数(复数 W),表示与相应的数值作乘法运算。在这种流程图中,基本运算单元呈蝴蝶形,例如图 9-12(a)。初看上去,一个蝴蝶形流程运算包括两次复数乘法和两次复数加法,然而这里有重复,可简化。$H(0)$与 W_4^0 相乘以及与 $-W_4^0$ 相乘,可以改成只与 W_4^0 相乘,再分别加、减,这样就使运算量减少至只有一次复数乘法和两次复数加(减)法。按此原理也可把图 9-12(a)所示的蝶形运算表示为图 9-12(b)所示的“蝶形结”,此图的含义是:入端的 $H(0)$先与 W_4^0 相乘,再与入端的$G(0)$分别作加、减,得到输出 $X(0)$与 $X(2)$。

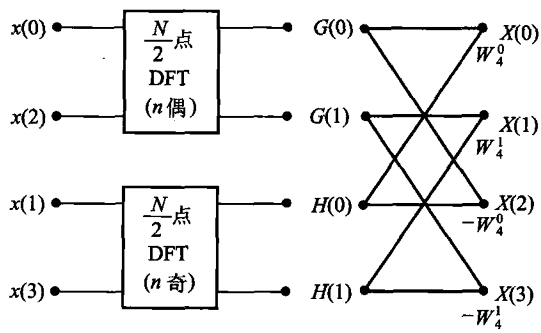


图 9-11 将 N 点 DFT 分解为两个$\frac{N}{2}$点 DFT 的流程图($N=4$)

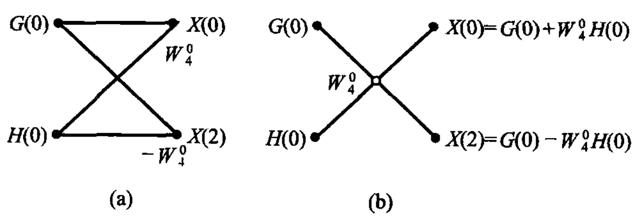


图 9-12 蝶形运算单元

现在,可以得出如下结论:由 $G(k)$,$H(k)$获得 $X(k)$的过程中,共包含$\frac{N}{2}$个蝶形结运算,因此,共需 $\frac{N}{2}$ 次复数乘法和 N 次复数加减法(对于 $N=4$,为 2 次乘、4 次加)。

再看图 9-11 的左半边,为了从 $x(n)$求出 $G(k)$,$H(k)$,按 n 的奇偶分别组合两个$\frac{N}{2}$点的 DFT 运算,利用式(9-87)和式(9-88)容易得到

$$\left.\begin{aligned} G(0)&=x(0)+W_2^0x(2)\\ G(1)&=x(0)-W_2^0x(2)\\ H(0)&=x(1)+W_2^0x(3)\\ H(1)&=x(1)-W_2^0x(3)\end{aligned}\right\}\tag{9-95}$$

按照同样原理,把这些运算也画成蝴蝶形,于是图 9-11 具体化为图 9-13(在此图中省略了加权系数 W_2 的下标,以 W 表示,下面继续用此简化符号)。

很明显,左半面的流程图,仍然由$\frac{N}{2}$个蝶形结组成,因此,运算量还是$\frac{N}{2}$次乘法,N 次加法。这样,为完成图 9-13 规定的全部运算,共需 $2\times\frac{N}{2}=4$ 次乘法和 $2\times N=8$ 次加法;而直接进行 $N=4$ 的 DFT 全部运算量为 $N^2=16$ 次乘法和 $N(N-1)=12$ 次加法。至此初步看到,经分组简化后构成的快速算法其运算工作量显著减少。

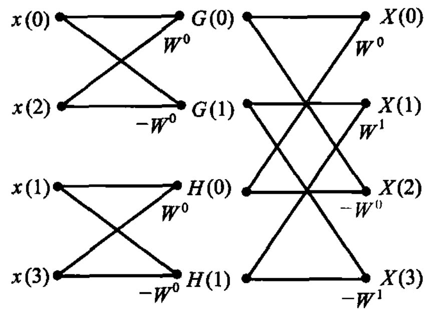


图 9-13　$N=4$ 的 FFT 流程图

对于 $N=2^2=4$ 的情况,只进行了一次奇偶分解,把全部运算过程分为两级(两组)蝶形流程图(即图 9-13 的左,右两半)。对于 $N=2^M$ 的任意情况,需要把这种奇偶分解逐级进行下去。当 $N=2^3=8$ 时,分组运算的方框图如图 9-14。按同样原理,把它画成蝶形流程图见图 9-15。这里,共分成三级蝶形运算,每组仍需乘法$\frac{N}{2}$次,加减法 N 次。全部运算量是 $3\times\frac{N}{2}=12$ 次乘,$3\times N=24$ 次加减;而直接 DFT 的运算量是 $N^2=64$ 次乘,$N(N-1)=56$ 次加(在此图中,中间数据的符号改用 x_1,x_2,不再用 G,H)。

当 $N=2^M$ 时,全部 DFT 运算可分解为 M 级蝶形流程图,其中每级都包含$\frac{N}{2}$次乘、N 次加减,快速算法的全部运算工作量为

复数乘法:$\frac{N}{2}\cdot M=\frac{N}{2}\log_2 N$ 次

复数加法:$NM=N\log_2 N$ 次

而原始的直接 DFT 方法需要

复数乘法:N^2 次

复数加法:$N(N-1)$次

在表 9-3 和图 9-16 中给出了 FFT 算法与直接计算所需乘法工作量的比

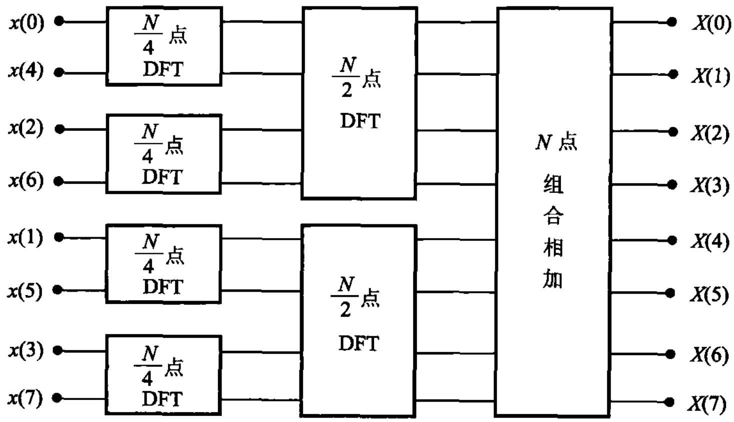


图 9－14　把 $N=8$ 的 DFT 运算逐级分解为两个$\frac{N}{2}$点、四个$\frac{N}{4}$点的 DFT 运算

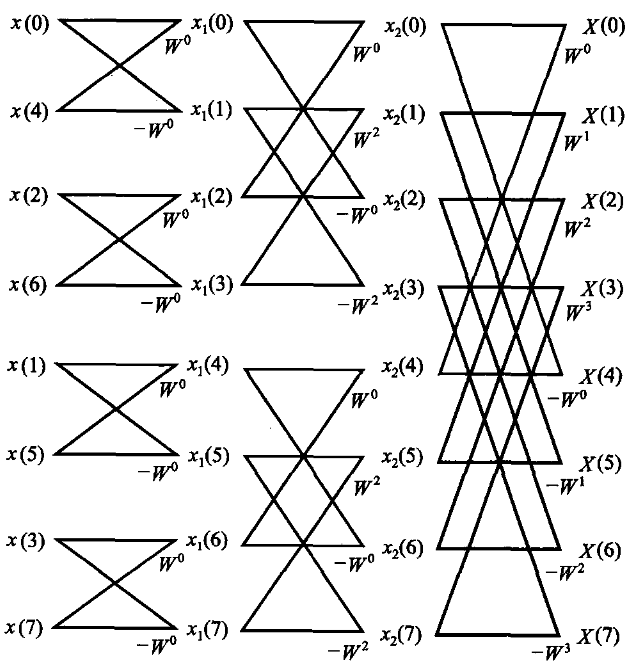


图 9－15　$N=8$ 的 FFT 流程图

较。从这些具体数字看到，当 N 较高时，FFT 算法得到的改善相当可观：例如 $N=2^{11}=2\ 048$ 时，直接按 DFT 定义计算所需时间是用 FFT 算法的三百多倍。

表 9-3 直接 DFT 与 FFT 所需乘法次数的比较

M	N	直接 DFT(N^2)	FFT$\left(\frac{N}{2}\log_2 N\right)$	改善比值$\left(\frac{2N}{\log_2 N}\right)$
1	2	4	1	4
2	4	16	4	4
3	8	64	12	5.3
4	16	256	32	8
5	32	1 024	80	12.8
6	64	4 096	192	21.3
7	128	16 384	448	36.6
8	256	65 536	1 024	64
9	512	262 144	2 304	113.8
10	1 024	1 048 576	5 120	204.8
11	2 048	4 194 304	11 264	372.4

最后讨论 FFT 算法流程图中的某些具体考虑,主要是“码位顺序”与“即位运算”这两个问题。

在给出图 9-13 或图 9-15 时,输入序列 $x(n)$ 的排列不符合自然顺序,而是以 $x(0)$, $x(2)$, $x(1)$, $x(3)$(对于 $N=4$)以及 $x(0)$, $x(4)$, $x(2)$, $x(6)$, $x(1)$, $x(5)$, $x(3)$, $x(7)$(对于 $N=8$)的次序进入计算机存储单元的。此现象是由于按 n 的奇、偶分组进行 DFT 运算而造成的,这种排列方式称为“码位倒读”的顺序。所谓倒读是指按二进制表示的数字首尾位置颠倒,重新按十进制读数。表 9-4 列出 $N=8$ 时两种排列顺序的互换规律,表中,最左端是自然顺序的十进制数字,把它们表示为二进制以后,将码位倒置,例如 110 变成 011,再按十进制读出已倒置的数字,即得最右端的码位倒读顺序,也就是图 9-15 中的输入排列顺序。

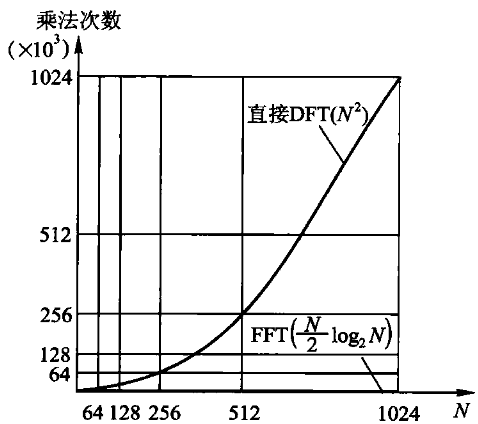


图 9-16 直接 DFT 与 FFT 算法所需乘法次数的比较

表 9-4　自然顺序与码位倒读顺序（$N=8$）

自然顺序	二进制表示	码位倒置	码位倒读顺序
0	000	000	0
1	001	100	4
2	010	010	2
3	011	110	6
4	100	001	1
5	101	101	5
6	110	011	3
7	111	111	7

能否把输入序列按自然顺序排列进行 FFT 运算呢？回答是可以的。图 9-17示出 $N=4$ 的另一形式之流程图，不难发现，它所执行的运算内容和图 9-13完全相同，区别仅在于，这里的输入序列改为自然顺序排列，而输出却变成了码位倒读顺序。

还可以构成输入、输出序列都按自然顺序（都不按码位倒读顺序）的 FFT 流程图，这种情况示于图 9-18。然而，此结构的缺陷是：不能实行“即位运算”，需要较多的存储器。

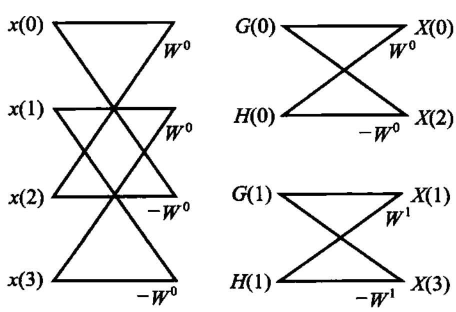


图 9-17　$N=4$ 的 FFT 流程图，输入序列自然顺序、输出序列码位倒读顺序

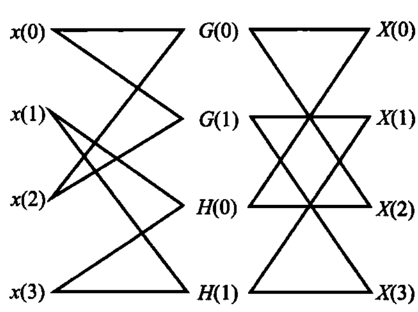


图 9-18　$N=4$ 的 FFT 流程图，输入序列、输出序列都为自然顺序

什么是即位运算呢？这就是当数据输入到存储器之后，每级运算结果仍然储存在原有的同一组存储器之中，直到最后一级算完，中间无需增设其他存储设备。例如图 9-13 与图 9-17 都是符合即位运算的。对于图 9-13 左上端的一

个蝶形运算单元,由输入 $x(0)$与 $x(2)$求得 $G(0)$与 $G(1)$之后,数据$x(0)$,$x(2)$即可清除,允许 $G(0)$,$G(1)$送入原存放数据 $x(0)$,$x(2)$的存储单元之中。求得 $H(0)$与 $H(1)$之后,也可送入原存放 $x(1)$,$x(3)$的位置。可见,在完成第一级运算过程中,只利用了原输入数据的存储器,即可获得顺序符合要求的中间数据,立即执行下一级运算。然而对于图 9-18,容易看出,第一级运算的蝴蝶形单元发生“歪斜”,不可能实现即位运算,需附加存储器供中间数据使用。

实际上,宁可在输入、输出端附加码位倒读的转换程序(也称变址处理),而不愿增多存储器。因此,一般采用图 9-13(图 9-15)或图 9-17 那样的具有即位运算能力的算法。在此二者之间也有差异,前者(参看图 9-15)加权系数 W 的指数按自然顺序排列,便于查找,而后者不具备这一特点(习题 9-28)。当 $N=2^M$ 时,输入序列码位倒读顺序、输出序列自然顺序之 FFT 流程图排列规律如下(参看图 9-15,$N=2^3$ 的例子):

(1) 全部计算分解为 M 级(也称 M 次迭代)。

(2) 输入序列 $x(n)$按码位倒读顺序排列,输出序列 $X(k)$按自然顺序排列。

(3) 每级(每次迭代)都包含$\frac{N}{2}$个蝶形单元,但其几何图形各不相同。自左至右第 1 级的$\frac{N}{2}$个蝶形单元分布为$\frac{N}{2}$个“群”,第 2 级则分为$\frac{N}{4}$个“群”,…,第 i 级分为$\frac{N}{2^i}$个“群”,…,最末一级只有$\frac{N}{2^M}$个也即一个“群”。

(4) 每个蝶形单元都包含乘 W^{nk}与 $-W^{nk}$的运算(简化为乘 W^{nk}与加、减法各一次)。

(5) 同一级中各个“群”的系数 W 分布规律完全相同。

(6) 各级的 W 分布顺序自上而下按如下规律排列:

第 1 级:W_N^0

第 2 级:$W_N^0, W_N^{\frac{N}{4}}$

第 3 级:$W_N^0, W_N^{\frac{N}{8}}, W_N^{\frac{2N}{8}}, W_N^{\frac{3N}{8}}$

…………

第 i 级:$W_N^0, W_N^{\frac{N}{2^i}}, W_N^{\frac{2N}{2^i}}, \cdots, W_N^{(2^{i-1}-1)\frac{N}{2^i}}$

…………

第 M 级:$W_N^0, W_N^1, W_N^2, W_N^3, \cdots, W_N^{\frac{N}{2}-1}$

读者可按上述规律练习排列任意 $N=2^M$(M 整数)值的 FFT 流程图(习题 9-30)。

离散傅里叶变换快速算法的原理同样适用于求逆变换(以 IFFT 表示),其差别仅在于,取 IDFT 时,加权系数改为 W^{-nk}(不是 W^{nk}),而且运算结果都应乘以系数$\frac{1}{N}$。

例 9-4　已知有限长序列

$$x(n)=\begin{cases}1 & (n=0)\\ 2 & (n=1)\\ -1 & (n=2)\\ 3 & (n=3)\end{cases}$$

按 FFT 运算流程求 $X(k)$,再以所得 $X(k)$利用 IFFT 反求 $x(n)$。

解

(1) 画出求 DFT 的流程如图 9-19 所示,逐级计算得 $X(k)$。

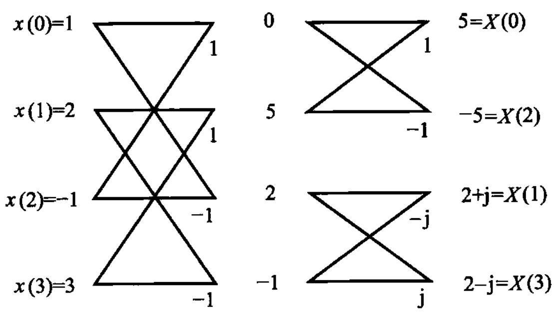


图 9-19　例 9-4 的 FFT 运算

(2) 画出求 IDFT 的流程如图 9-20,逐级计算得 $x(n)$。

以上讨论的库利-图基 FFT 算法,按输入序列在时域的奇偶顺序分组,也称为按时域抽取的 FFT 算法;与此对应的另一种办法是在频域按奇、偶顺序分组,称为按频率抽取的 FFT 算法,也称桑德-图基(Sande-Tukey)算法(习题 9-31 至习题 9-34)。

如果样点数目 N 不是 2 的整数幂次,也可排出 FFT 算法程序,称为任意因子的 FFT 运算。[①]

从 FFT 算法诞生至今,各种改进或派生的信号处理快速算法层出不穷。本书只介绍了关于 FFT 算法的初步概念。详细深入的分析可参看"数字信号处理(或离散时间信号处理)"方面的教材以及有关文献。

① 见参考书:布赖姆 E O 著.快速傅里叶变换.柳群译.上海:上海科技出版社,1979。

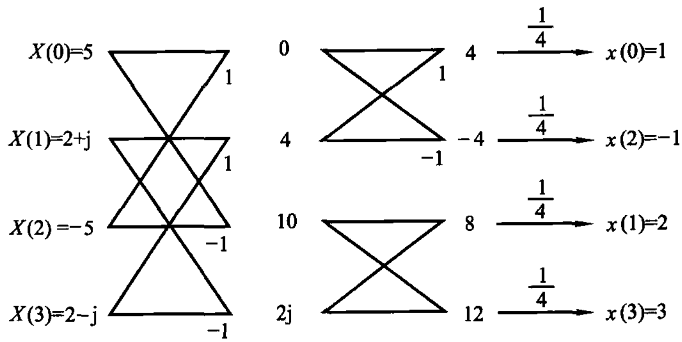


图 9－20　例 9－4 的 IFFT 运算

9.7 离散傅里叶变换的应用

如今,DFT 的应用已遍及各个科学技术领域,可以列举丰富的实例来说明它的应用原理。限于本课程的范围,仅就其典型、普遍的问题作一粗浅介绍,即使论述得这样简短,读者也足以感受到这一方法在实际应用中的重大作用。

运用 DFT 方法,往往伴随着 FFT 算法的实施,于是,所谓“DFT 的应用”几乎与“FFT 的应用”成为同义语。

FFT 方法可直接用来处理离散信号的数据,也可用于对连续时间信号分析的逼近。

(一) 快速卷积

在 9.4 节(四)曾经讨论,若长度为 N_1 的序列 $x(n)$ 与长度为 N_2 的序列 $h(n)$ 作线卷积,得到

$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m) \tag{9-96}$$

$y(n)$ 也是一个有限长序列,其长度为 N_1+N_2-1。由式(9－96)可知,在卷积运算过程中,每个 $x(n)$ 的样值都必须与每个 $h(n)$ 的样值相乘,因此,共需要 N_1N_2 次乘法运算,在 $N_1=N_2=N$ 的情况下,需 N^2 次乘法运算。

如果把求线卷积改为求圆卷积(两序列分别补零点加长至 N_1+N_2-1),并借助 FFT 技术,有可能减少求卷积所需的运算工作量。

图 9－21 示出直接卷积与快速卷积两种方案的原理方框图。由图 9－21(b)可见,快速卷积的过程中,共需要两次 FFT,一次 IFFT 计算,相当于三次 FFT 的运算量。在一般的数字滤波器中,由 $h(n)$ 求 $H(k)$ 这一步是预先设计好的,数据已置于存储器之中,故实际只需两个 FFT 的运算量,如果假定 $N_1=$

$N_2 = N$,经补零后点数为 $N_1 + N_2 - 1 \approx 2N$,因而需要 $2 \times \left(\frac{2N}{2}\log_2 2N\right)$次复数乘法运算。此外为完成 $X(k)$与 $H(k)$两序列相乘,还需要作 $2N$ 次复乘。全部复乘运算次数为

$$2(N\log_2 2N) + 2N = 2N(1 + \log_2 2N) \qquad (9-97)$$

显然,随着 N 值增大,式(9-97)的数字要比 N^2 显著减少,因此,圆卷积的方案可以快速完成卷积运算。

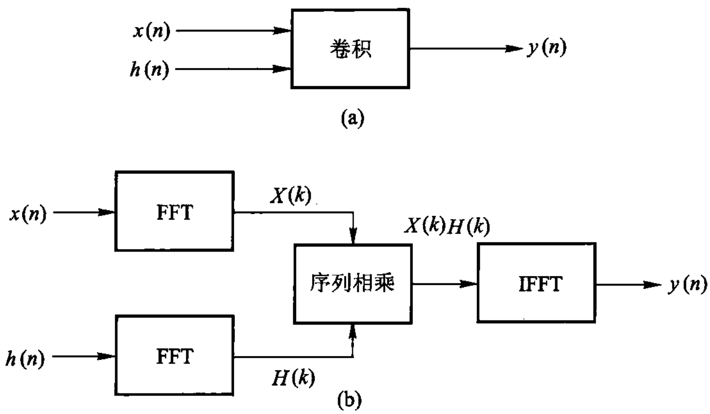


图 9-21 直接卷积与快速卷积原理方框图

以上分析是针对两序列长度接近或相等的情况。如果其中一个序列较短,而另一序列很长,那么在进行圆卷积时,短序列需补零甚多,于是圆卷积方案的相对运算量可能减少不多,甚至增多。为克服这一困难,可采用分段卷积(或称分段过滤)的方法。其基本原理是将较长的一个序列,例如 $x(n)$分为许多小段,每小段长度都与 $h(n)$接近,将 $x(n)$的每个小段分别与 $h(n)$作卷积,最后取和。这时,仍有可能发挥快速卷积的优越性。此方案的具体实现不是惟一的,这里介绍所谓“重叠相加法”。

假定 $h(n)$,$x(n)$均为因果序列。$h(n)$的长度是 N,示意于图 9-22 (a)。$x(n)$长度是 N_1,$N_1 \gg N$,现将 N_1 等分为若干小段,每段长 M,如图9-22(b)所示。以 $x_i(n)$表示 $x(n)$序列的第 i 小段$\left(i\text{为正整数}, 0 \leqslant i \leqslant P - 1, P = \frac{N_1}{M}\right)$,为完成各 $x_i(n)$与 $h(n)$之圆卷积,应将 $x_i(n)$长度补足至 $N + M - 1$,在图 9-22(c)中已用虚线示意补零。输入序列可表示为

$$x(n)=\sum_{i=0}^{P-1}x_i(n) \tag{9-98}$$

其中

$$x_i(n)=\begin{cases}x(n) & [iM\leqslant n\leqslant (i+1)M-1]\\ 0 & (n\text{ 为其他值})\end{cases}$$

相应地，输出序列也可分解为

$$\begin{aligned}y(n)&=x(n)*h(n)\\ &=\left[\sum_{i=0}^{P-1}x_i(n)\right]*h(n)\end{aligned} \tag{9-99}$$

利用卷积分配律可得

$$\begin{aligned}y(n)&=\sum_{i=0}^{P-1}[x_i(n)*h(n)]\\ &=\sum_{i=0}^{P-1}y_i(n)\end{aligned} \tag{9-100}$$

这里

$$y_i(n)=x_i(n)*h(n) \tag{9-101}$$

由于 $y_i(n)$ 的长度为 $N+M-1$，而 $x_i(n)$ 的有效长度只有 M，故相邻两段的 $y_i(n)$ 必有 $N-1$ 长度的重叠，见图 9-22(d)。

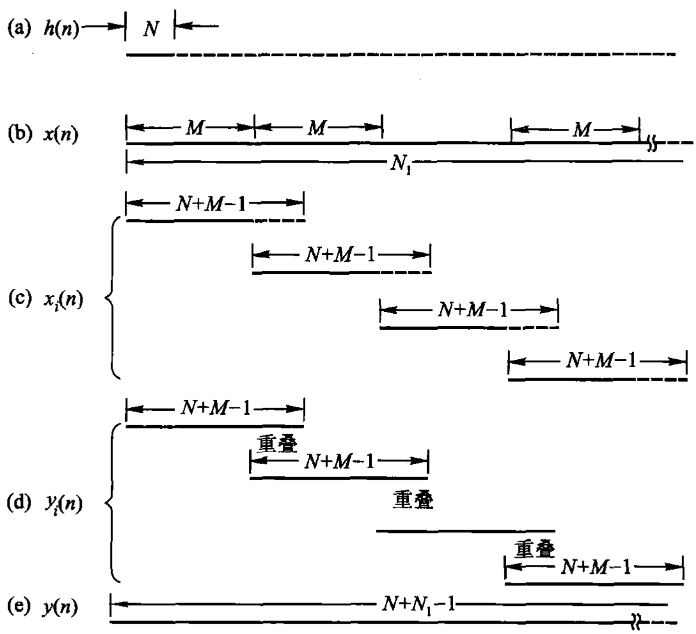


图 9-22 两序列长度相差很大时快速卷积的重叠相加法

按照上述原理，此方法的运算过程可分为两部分：首先求每个 $x_i(n)$ 与 $h(n)$ 的圆卷积，样点数为 $N+M-1$，共需 P 次，求各 $y_i(n)$，其原理仍按图 9-21(b)；然后将 $y_i(n)$ 取和(实际上是重叠部分相加)，即得 $y(n)$。

有时，N_1 可能很长，以致趋于无限大，例如语音信号、地震波动信号、宇宙通信中产生的某些信号等，如果不采用分段卷积的方法将迟迟不能给出结果，而且，无法找到那样大的存储设备来满足 N_1 的需要。因此，即使在分段措施改善速度不显著的情况下，仍有可能采用这种方法。

借助 FFT 不仅可完成快速卷积运算，也可利用它进行解卷积运算，具体计算公式可仿照 z 变换解卷积方法求得(见第八章 8.5 节)，作为练习，读者可自行写出。

(二) 快速相关(功率谱计算)

与快速卷积的原理类似，相关(或自关)运算同样可借助 FFT 技术完成。图 9-23 示出直接相关与快速相关两种方案的原理方框图。

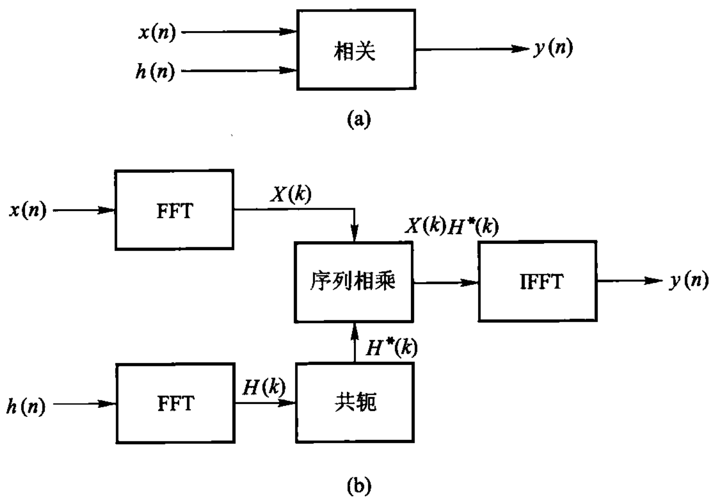


图 9-23　直接相关与快速相关原理方框图

相关运算的应用常见于雷达系统或声呐系统之中，在那里，以这种运算来确定隐藏在可加噪声中的信号时延。人们早已利用连续时间系统实现相关接收，随着 FFT 技术的发展，数字式相关处理器已被广泛采用，在许多方面其性能优于旧式的模拟相关器。

利用上述原理，也可求序列的功率谱，这时，在图 9-23 中 $x(n)$ 与 $h(n)$ 应是同一信号(省去一个 FFT 运算)，这时，$y(n)$ 是自关函数，$Y(k)$ 就是 $x(n)$ 的功率谱。

(三) 对连续时间信号分析的逼近(信号频谱分析)

一般情况下,待研究的连续时间信号不具备离散性或周期性,也可能有无限长度。为使其适应 FFT 方法的需要,应对此波形进行抽样和截断,在此情况下,利用 FFT 计算之结果必然引入误差。下面按几种典型情况说明误差形成的原因。

(1) 时间有限信号

待分析的信号只出现在某一确定时间之内,也即它是时间受限的。这时,其傅里叶变换不可能是有限带宽的,因此,根据抽样定理可知,当时间函数进行抽样以后,频谱必然造成混叠(aliasing)。也即,无论怎样减小抽样间隔 T_s,混叠虽有可能减弱,但总是不可避免。

(2) 频率有限信号

与前一种情况相反,若信号频谱限制于某一频率范围,则时间函数是无限的,图 9 - 24 示意绘出这种波形 $x(t)$及其频谱 $X(f)$的例子。为利用 FFT 对此信号进行分析,必须把时间函数截取一有限范围,此截断过程可理解为信号 $x(t)$与一矩形脉冲 $h(t)$相乘,后者称为窗函数,好像通过一个矩形窗口拍摄 $x(t)$,只能取出如 $x_1(t)$的图形。$x_1(t)$的变换可看作是 $X(f)$与窗函数频谱 $H(f)$之卷积,如图 9 - 24 中的 $X_1(f)$,此结果表明,截断过程使频谱产生失真,它从原有的频率受限图形扩展开来,称为"泄漏"(leakage)。

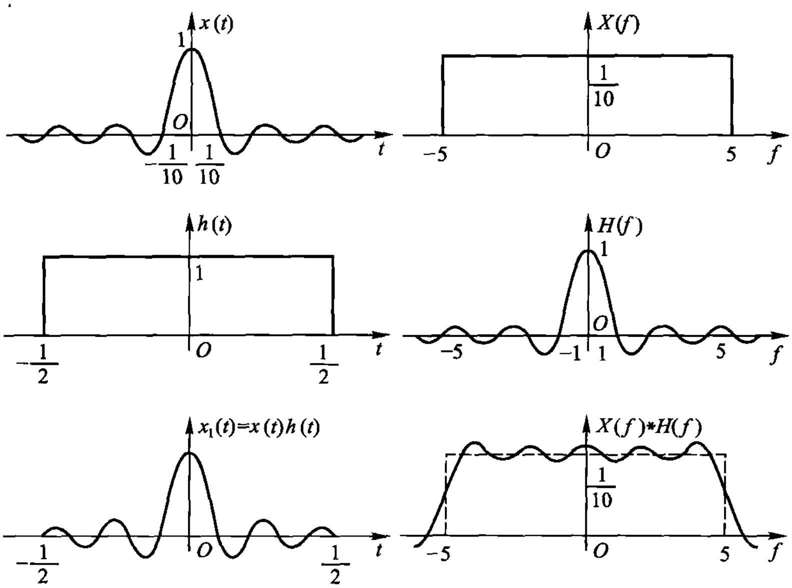


图 9 - 24 频率有限信号经截断后的频谱泄漏

对于时间无限的信号经截断引起的频谱泄漏是无法避免的。减少泄漏的方法是改善窗函数的形状,因为矩形窗在时域的突变导致频域拖尾严重,收敛很慢。为解决此矛盾,已经研究了各种形式的窗函数,例如升余弦形的窗函数[汉宁(Haning)窗]、改进的升余弦窗[汉明(Hamming)窗]、二阶升余弦窗[布莱克曼(Blackman)窗]等,它们都在不同程度上压低了频谱的旁瓣,使泄漏现象减弱(详见第十章 10.7 节 FIR 数字滤波器设计)。

泄漏与混叠有着密切联系,因为泄漏导致频谱扩展,从而引起混叠。

(3) 周期信号

对于频谱无限的周期信号,经抽样后也要产生混叠,这种情况与时间受限信号类似,显然,把时间受限信号作 DFT 处理时,实质上已进行了周期延拓并取其主值。

如果周期信号的频谱是有限的,正确选择抽样频率可避免混叠。

从 DFT 计算结果转至连续信号的频谱时,还有一个问题需要解决,这就是电平数值的相对变动。对于这种变动的转移关系,我们并不陌生,在第三章 3.9 节曾利用连续信号的频谱函数计算抽样信号的频谱,此时需倍乘系数$\frac{1}{T_s}$(T_s为抽样时间间隔)。现在,对于 DFT 和 IDFT 的计算,若要应用于连续时间信号也有类似的转换关系,主要规律如下:

(1) 对一个时间有限连续信号进行傅里叶分析。按式(9-12)求 DFT 将计算结果乘以系数 T_s,即可得到其近似频谱。

(2) 由频谱合成波形。如果已知某信号的频谱在正、负频率范围内共占据频带 f_s,利用 IDFT 计算之结果乘以系数 f_s 即可获得其近似的时间波形。

(3) 用DFT 来求一周期函数的傅里叶级数近似式。这时,因子$\frac{1}{N}$最好是放置在正变换式中,而不是在逆变换式中,采取这一措施之后,无论正、逆 DFT 变换都可直接表示所需结果,无需再乘转换系数。

在许多实际问题中,变换电平的步骤往往无关紧要,只要求正、逆变换函数的相对值有正确结果。因此,在各种书刊文献中常根据作者习惯,以不同形式放置这些系数。

例 9-5　利用 DFT 方法求图 9-25(a)所示三角脉冲的频谱,它具有单位幅度,持续时间是 2 ms,所求谱线间距(分辨力)$f_1=100$ Hz,最高频率范围限于 $f_h=25$ kHz。

解

(1) 由 f_h 提出对抽样时间间隔 T_s 的要求为

$$T_s \leqslant \frac{1}{2f_h}=\frac{1}{2\times25\times10^3}\ \text{s}$$

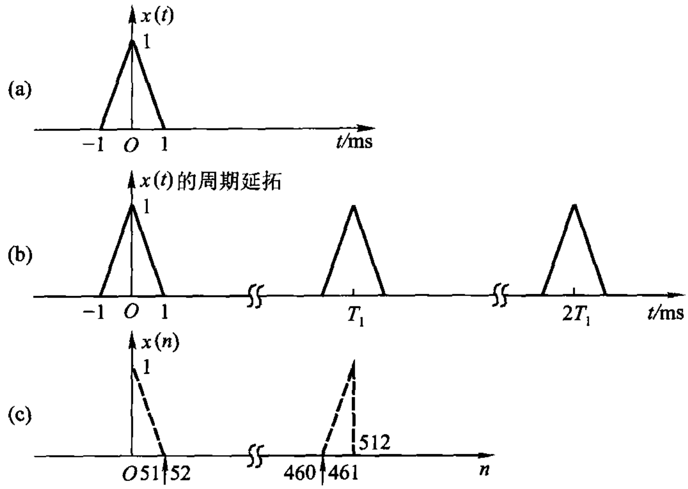


图 9-25 例 9-5 的三角形脉冲及其周期延拓和取主值序列

得

$$T_s \leqslant 20\ \mu s$$

(2) 由 f_1 决定时间函数的延拓周期(数据记录长度)

$$T_1 = \frac{1}{f_1} = \frac{1}{100}\ s = 10\ ms$$

画出经周期延拓之波形如图 9-25(b)所示,其主值区间示于图 9-25(c)。

(3) 决定样点数目 N

$$N = \frac{T_1}{T_s}$$

$$N \geqslant \frac{10 \times 10^{-3}}{20 \times 10^{-6}} = 500$$

取 $N = 512 = 2^9$,则确定

$$T_s = T_1 / N = 19.53125\ \mu s$$

在选定 T_1、T_s 和 N 之后,即可按照式(9-32)计算 $x(n)$ 之 DFT 函数 $X(k)$。为了考察 DFT 计算引入的误差,我们同时对 $x(t)$ 直接进行连续时间信号的傅里叶变换积分运算,经比较得知两种方法求得之结果非常接近。例如,在频率 $f=0$ 点,严格的 $X(f)$ 值为 1×10^{-3},而对应的 DFT 之 $k=0$ 点其值为 $X(k)=1.00006\times10^{-3}$;在 $f=100$ Hz(对应 $k=1$)时,两种计算结果分别为 9.67593×10^{-4} 和 9.67531×10^{-4}……其余各点之相对误差也都很小。我们将两种计算结果绘制成幅度谱如图 9-26 所示。由于二者差值非常小,在此图中两曲线几乎完全重叠,因而无法区分。图中,纵坐标为 $X(f)$ 或 $X(k)$,横坐标为

f 或 k，例如 $f=100$ Hz 对应 $k=1$，当 k 值按整数依次增长时，对应 f 值之间隔为 100 Hz，即原题意给定之分辨力 f_1 值。在一般情况下，本例是一个很满意的近似。

显然，以上求解需运用计算机编程进行，例如借助 MATLAB 软件完成。我们将在 MATLAB 综合实验课堂上给出具体的练习题目（见参考书目[5]第四章第一节和第八章第五节）。

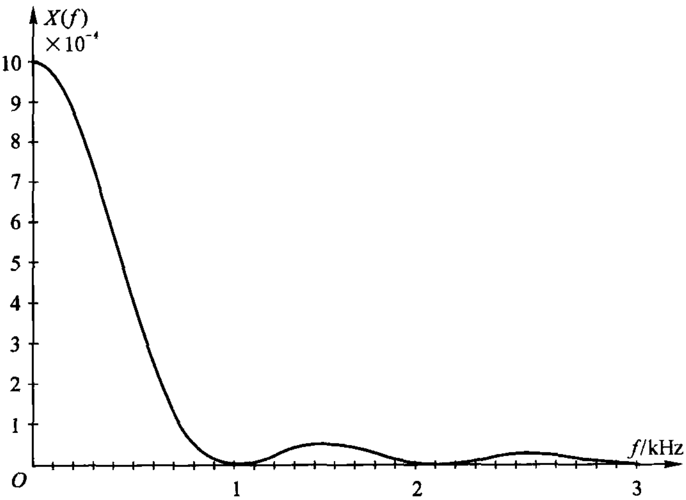


图 9－26　三角脉冲幅度谱曲线

9.8　DFT(FFT)应用实例——OFDM 通信系统之实现

前节初步介绍了 DFT 应用的基本问题，在后续数字信号处理等课程中，还会讨论一些更为广泛的实际应用，如数字滤波器的设计等。在此，我们不准备继续研究那些在各类教材中容易见到的一般应用实例，而是选择了一个在当代通信系统实现技术中比较新颖且引人注目的例子——OFDM 系统的 DFT(FFT) 算法实现。

OFDM 是正交频分复用(Orthogonal Frequency Division Multiplexing)之缩写词。

一般讲，当代通信系统要解决的主要矛盾是在信号传输过程中努力提高有效性和可靠性。所谓有效性是指在一定时间内传送更多的信息，最常见的解决对策就是提高码元速率（构建宽带传输系统）。而影响可靠性的主要因素是噪声干扰和传输信道非理想特性引入的失真。对于无线传输信道，多径效应是信道

引起传输信号失真的重要原因之一。所谓“多径”是指发射天线到接收天线之间会有多条不同的传输路径(如建筑物反射波引起)。多径效应使接收机收到延时时间不同的多路信号重叠在一起,导致误码率性能变坏。

这个问题对我们并不陌生,在第二章 2.9 节我们曾就多径失真现象的消除进行初步分析,后来又在第四章习题 4-51、第五章习题 5-27 以及第七章 7.7 节等处多次继续讨论这个问题,此处,我们将进入更深层次的研究。

如果时延相对于传输码元周期足够小,则码间干扰造成的传输错误可忽略不计。或者说,当信道时延一定时,码速越高则产生误码的概率越大。若码元速率太高,多径效应可能使码间干扰严重,必须采取措施消除干扰。常用的解决办法是对信道进行均衡。

“均衡”作用之实质是努力寻找与信道模型相应的逆系统,试图使信道与均衡器组合能提供逼近理想传输特性的系统模型。也可以认为这是期望利用均衡器来抵消信道非理想特性引入的失真。前文第二章至第七章的有关分析都是借助最简单的均衡原理构建逆系统用来消除多径失真。然而,这些研究与实际应用环境尚有明显差距。一般情况下,由于信道具有时变特性,所以均衡器必须具有很好的自适应调节能力,在参考书目[4]的第三篇 3.8-8 题给出了一个自适应均衡的简单实例——电信网用户终端回波抵消器。如有兴趣,请读者参看。目前,在各类通信传输系统中要设计和实现性能满意的均衡器还需要克服许多困难。

为解决多径效应引起信号传输质量下降的矛盾,还可以采取与上述思路完全不同的另一类方法,这就是多载波调制(multicarrier modulate, MCM)技术。MCM 利用一组(N 个)子载波在信道中并行传输信号,它将待传送的高速数据流分解成一组并行传输的低速数据流。每个子载波传送的数据率只是原有单载波系统的$\frac{1}{N}$,也即,每个子载波承载的码元周期是原单载波系统码元周期的 N 倍,这就使得每个子载波传输码元之周期可以远远大于信道时延之扩展,从而具有很强的抗码间干扰能力。

很早以前,人们就已经认识并利用多载波技术,但存在许多矛盾未能很好解决。传统的多载波传输构成原理与频分复用类似。高速码流经串并转换构成 N 个低速码流之后,分别对 N 个子载波进行调制。各子载波信号占据互不交叠的频率范围。这种系统需要大量的带通滤波器和调制解调器,这使系统的复杂度和成本大大提高,鲁棒性也较差。同时,为了降低邻近载波信号之间的相互干扰,各子载波之间必须留出足够裕量的保护频带,因而使系统的频谱利用率大大降低。

为解决上述矛盾,60 年代中期,美国 Bell 实验室 R.W.Chang 提出采用正交

多载波体制以节省频带之方案，此方案要求各子载波之间相互正交。在接收端利用正交运算（匹配滤波）技术可以将频谱相互重叠之子载波信号逐个分离。这就是 OFDM 传输系统。

若基带信号为矩形脉冲，对单载波调制后其频谱形状为位于载波点处之 Sa 函数。而当对基带信号经串并转换之后再对多个子载波进行调制时，相加信号的频谱如图 9－27 所示。设码元时间长度为 T_s，图中，各频谱之过零点位于 $2\pi/T_s$ 之整数倍处。多载波满足相互正交之要求。

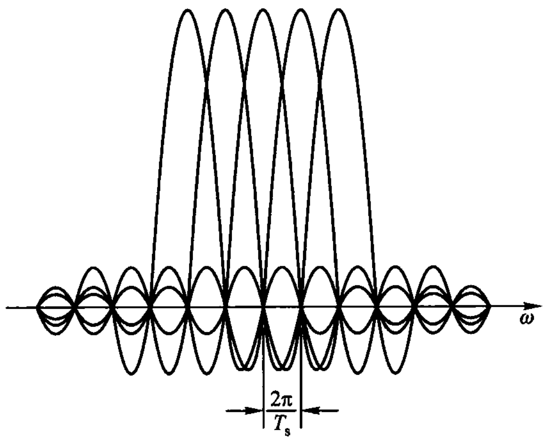


图 9－27　多个子载波信号的频谱

按照上述方案实现 OFDM 传输的原理方框图如图 9－28 所示。原始的基带信号具有较高的码元速率，经串并转换之后分解为多个低速码流，它们分别对相互正交的一组子载波信号 $\cos(\omega_0 t)$，$\cos(\omega_1 t)$，…，$\cos(\omega_{N-1} t)$ 进行调制，再经相加后传送到接收端。接收机对接收到的信号进行解调，为此，一组与发射机对应的子载波与接收信号作相乘、积分计算，以完成相关运算，将信号分离。经分离后之码流经并串转换后即可恢复原始基带信号。

从本质上讲，OFDM 技术是将在时域上相距很窄、频域占据很宽的比特流变换为频域上相距很窄、时域占据很宽的比特流。因此，对于脉冲噪声这种时宽很窄的干扰信号对 OFDM 比特流之影响就相对被削弱了，这正是 OFDM 系统的优点。

可以看出，按图 9－28 方式实现 OFDM 系统需要大量的正弦波发生器和调制、解调器，硬件结构相当复杂。因此 OFDM 技术在相当一段时间内仍然不能得到广泛应用。

1971 年 Weistein 和 Ebert 撰文给出了将 DFT（FFT）技术应用于 OFDM 传

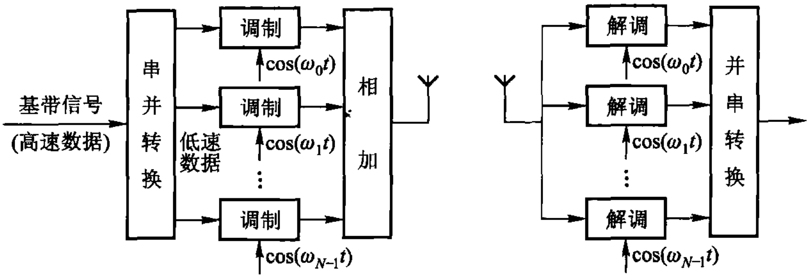


图 9－28 实现 OFDM 传输的原理方框图

输系统的实现方案，以此取代复杂的硬件结构，使 OFDM 研究与应用进入了一个新阶段。从此，OFDM 传输方式出现了全面发展的契机，成为当代通信系统研究领域最引人注目的课题之一，得到日益广泛的应用。

为了说明如何以 DFT(FFT)方法取代传统的硬件结构，需要写出正交频分复用传输信号的数学表达式。下面以 QPSK 数字调制子载波方式为例来讨论这个问题。QPSK(正交相移键控)调制方式也称为 4PSK(四相键控)。我们先看 2PSK(二相键控)数字调制信号构成之原理，图 9－29 示出波形举例。图中，二进制数字信号 1001……对载波(正弦信号)进行相位调制，得到已调信号 $d(t)$ 之波形。此处，码元周期为 T_s，对应“1”码，载波起始相移为 0，而对应“0”码，载波起始相移为 π。在接收端可以按此相移规律进行解调，恢复二进制数字信号。注意对于这种调制方式 $d(t)$ 之幅度和载波频率都保持常值。

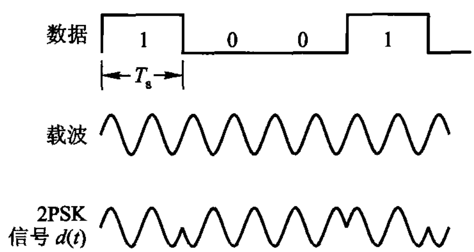


图 9－29 2PSK 数字调制信号波形

仿此原理，容易理解 4PSK(QPSK)数字调制信号之构成原理。这是一种四进制的相移调制方式。已调信号 $d(t)$ 之表达式可写作

$$d(t) = a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t) \tag{9-102}$$

式中，前边的 $\cos(\omega_0 t)$ 项称为同相分量，后面的 $\sin(\omega_0 t)$ 项称为正交分量。系

数 a、b 之取值可以是“1”或“-1”，于是由此组成 4 种可能的相移，而其频率和幅度仍保持常值。表 9-5 给出四进制数码的四种组合情况下（即 11,01,00,11）相应的 a、b 和 $d(t)$ 相移之规律。

表 9-5 QPSK 信号 a、b 与 $d(t)$ 相移关系例

码元组合	11	01	00	10
a	1	-1	-1	1
b	1	1	-1	-1
相移	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$

这种规律也可用矢量图示意描述，如图 9-30 所示。从此图可以看出，它与前面的 $d(t)$ 表达式以及表 9-5 完全一致，还可仿照图 9-30 画出 4PSK 之波形，留给读者自行练习。

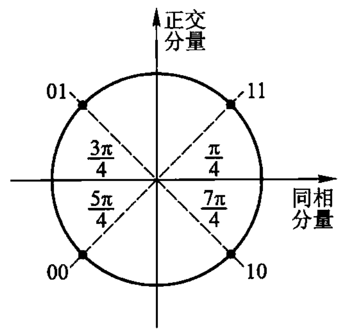


图 9-30 QPSK 信号的矢量描述

如果正交频分复用系统各子载波信号之频率分别为 ω_0、ω_1、ω_2、…、ω_{N-1}，当采用 QPSK 调制方式时，则 OFDM 合成信号之表达式为

$$x(t) = \sum_{n=0}^{N-1}[a_n\cos(\omega_n t) + b_n\sin(\omega_n t)] \tag{9-103}$$

式中，a_n、b_n 由第 n 个载波对应之基带信号的四种状态控制。设基带信号码元周期为 T_s，各子载波角频率值为 $\omega_n = n\left(\frac{2\pi}{T_s}\right)$。

下面对 $x(t)$ 表达式在时域抽样。若抽样间隔时间为 $T=\frac{T_s}{N}$，抽样时刻位于 $t=kT$，于是得到

$$\begin{aligned} x(k) &= \sum_{n=0}^{N-1}[a_n\cos(\omega_n t_k) + b_n\sin(\omega_n t_k)] \\ &= \mathrm{Re}\left\{\sum_{n=0}^{N-1}(a_n - \mathrm{j}b_n)[\cos(\omega_n t_k) + \mathrm{j}\sin(\omega_n t_k)]\right\} \\ &= \mathrm{Re}\left\{\sum_{n=0}^{N-1}(a_n - \mathrm{j}b_n)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_n\left(\frac{kT_s}{N}\right)}\right\} \\ &= \mathrm{Re}\left\{\sum_{n=0}^{N-1}(a_n - \mathrm{j}b_n)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{2\pi}{N}\right)kn}\right\} \\ &= \mathrm{Re}\{\mathrm{IDFT}[D(n)]\} \end{aligned} \tag{9-104}$$

对照前文 IDFT 之定义[式(9-19)与式(9-33)]，即可看出上式括号内是对

$D(n)$复函数取 IDFT,式中 k 与 n 的位置与原定义式相反,这不影响所得结果。$D(n)$即$(a_n - jb_n)$,它是 QPSK 调制信号的复数共轭表示,完全由基带信号决定,或者说它携带了基带信息。

很明显,从以上推导可以看出,在发射端我们只要对 $D(n)$进行 IDFT 运算即可产生 OFDM 信号。其功能完全可以取代大量振荡器与调制器构成之硬件系统。可以证明,在接收端对此信号进行 DFT 运算即可恢复 $D(n)$,从而获得原始之基带信息。为达此目的,需要对 DFT 取 $2N$ 点抽样,抽样间隔为 $T_s/2N$。可见,这一方法使接收系统也大大简化。以上分析为 OFDM 系统的数字化提供了理论依据。传统观念中各子载波分别需要许多模拟前端的方式可以由一个共同的 DFT 运算所代替,从而极大地降低了系统的复杂度。随着超大规模集成(VLSI)系统技术的发展,出现了价格低廉、结构简单的 FFT 专用集成电路芯片以及通用数字信号处理器(DSP)芯片,这就使 OFDM 系统的付诸应用成为现实。

目前,OFDM 技术的应用已经深入到各类通信系统领域。例如,无线通信方面的数字声广播(DAB)、地面数字视频广播(DVB－T),有线通信领域的非对称数字用户环路(ADSL)等。人们正在研究将这种技术应用于第四代移动无线通信系统。各类系统利用 OFDM 技术之动机和系统构成方式虽然有所不同,然而它们的共同点是都要借助 DFT 运算来实现。

必须指出,撰写本节的目的是为读者提供 DFT 应用的生动例证,从中可以感受到在当代通信工程中 DFT(FFT)技术的无所不在。前文仅着重介绍了 OFDM 的简要原理,只是入门知识。要理解 OFDM 系统的具体实现尚有许多问题需进一步研究和考虑,文中都未涉及。这些内容正是目前研究工作之热点(包括许多博士论文的工作)。

9.9 沃尔什变换及其应用举例

(一) 一维沃尔什变换

从本书上册第六章 6.5 节沃尔什级数展开式及其系数表示式可以得到如下的沃尔什变换对:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \mathrm{Wal}(k,t) \qquad (0 \leqslant t < 1) \\ \alpha_k &= \int_0^1 x(t)\mathrm{Wal}(k,t)\mathrm{d}t \qquad (k = 0,1,2,\cdots) \end{aligned}\right\} \tag{9-105}$$

在实际应用中,这种连续的(取积分)变换式不方便,为实现数字计算,可在

$0\leqslant t<1$的区间内,按等距离取 N 个离散点,在这些离散点取函数的抽样值,这样,就把函数 $x(t)$展成只包含 N 个离散项的沃尔什级数。类似离散傅里叶变换的形式,可以得到离散沃尔什变换(以符号 DWT 表示)。

若 $x(t)$的样值为 $x(n)$,$\mathrm{Wal}(k,t)$的抽样值以 W_{kn}表示,其中 $n=0,1,2,\cdots,N-1$,则离散沃尔什变换的定义为

$$X(k)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_{kn} \qquad (9-106)$$

$$(k=0,1,2,\cdots,N-1)$$

N 表示 DWT 的阶数,W_{kn}是 $\mathrm{Wal}(k,t)$的 N 个等间隔抽样值,它只取 $+1$ 或 -1 两个数值,在 $0\leqslant t<1$ 区间内,t 的抽样点取在 $t=\dfrac{2n+1}{2N}$处(相应的抽样位置避开跳变点)。

离散沃尔什逆变换的定义为

$$x(n)=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_{kn} \qquad (9-107)$$

$$(k=0,1,2,\cdots,N-1)$$

$$(n=0,1,2,\cdots,N-1)$$

式(9-106)与式(9-107)构成离散沃尔什变换对。关于系数$\dfrac{1}{N}$的处理,可按以上定义,也可将它移至逆变换式中。

DWT 变换对式(9-106)与式(9-107)可以表示为如下的矩阵形式

$$\boldsymbol{X}=\frac{1}{N}\boldsymbol{x}\boldsymbol{W}_N \qquad (9-108)$$

式中,$\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{X}$ 都是行向量①

$$\boldsymbol{x}=[x(0),x(1),\cdots,x(N-1)]$$

$$\boldsymbol{X}=[X(0),X(1),\cdots,X(N-1)]$$

而 $\boldsymbol{W}_N$ 是方阵

$$\boldsymbol{W}_N=\begin{bmatrix} W_{00} & W_{01} & \cdots & W_{0,(N-1)} \\ W_{10} & W_{11} & \cdots & W_{1,(N-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ W_{(N-1),0} & W_{(N-1),1} & \cdots & W_{(N-1),(N-1)} \end{bmatrix} \qquad (9-109)$$

① 如果取行向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{X}$ 的转置$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$(都为列向量),则变换对的矩阵表示式为 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}=\dfrac{1}{N}\boldsymbol{W}_N\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{W}_N\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$。也可将 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{X}$ 直接规定为列向量,则有

$$\boldsymbol{X}=\frac{1}{N}\boldsymbol{W}_N\boldsymbol{x} \quad 和 \quad \boldsymbol{x}=\boldsymbol{W}_N\boldsymbol{X}$$

可根据书写方便选用。

逆变换的矩阵形式为

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{W}_N \tag{9-110}$$

沃尔什矩阵具有正交特性，即

$$\frac{1}{N}\boldsymbol{W}_N\boldsymbol{W}_N = \boldsymbol{I} \tag{9-111}$$

式中 $\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵。利用这一性质，可以证明上述沃尔什变换及其逆变换关系的正确性，将正变换式(9－108)代入逆变换式(9－110)之中得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x} &= \frac{1}{N}\boldsymbol{x}\boldsymbol{W}_N\boldsymbol{W}_N \\ &= \boldsymbol{x}\boldsymbol{I} = \boldsymbol{x}\end{aligned} \tag{9-112}$$

可见，变换对的表示式正确。

例 9－6 求单位振幅正弦信号 $x(t)=\sin(2\pi t)\quad(0\leqslant t<1)$ 的 8 阶($N=8$)DWT。

解

对 $x(t)$ 在 8 个等间隔点上抽样，抽样点位于 $t=\frac{2n+1}{16}$ 处，即分别取 $\sin\left(\frac{2\pi}{16}\right),\sin\left(\frac{6\pi}{16}\right),\cdots,\sin\left(\frac{30\pi}{16}\right)$ 之值。

$$\begin{aligned}[x(n)] &= [x(0),x(1),\cdots,x(7)] \\ &= [0.38,0.92,0.92,0.38,-0.38,-0.92,-0.92,-0.38]\end{aligned}$$

将以上数据和 8 阶沃尔什矩阵代入式(9－108)即可求得各变换系数，为书写方便，将 $x(n)$ 以列矩阵形式写出

$$\begin{bmatrix}X(0)\\X(1)\\X(2)\\X(3)\\X(4)\\X(5)\\X(6)\\X(7)\end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&-1&-1&-1&-1\\1&1&-1&-1&-1&-1&1&1\\1&1&-1&-1&1&1&-1&-1\\1&-1&-1&1&1&-1&-1&1\\1&-1&-1&1&-1&1&1&-1\\1&-1&1&-1&-1&1&-1&1\\1&-1&1&-1&1&-1&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.38\\0.92\\0.92\\0.38\\-0.38\\-0.92\\-0.92\\-0.38\end{bmatrix}$$

$$
=\begin{bmatrix} 0 \\ 0.65 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.27 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

这里所得矩阵中的各变换系数分别表示抽样函数 $x(n)$ 的各沃尔什分量系数。若要由变换式反求原函数(作逆变换)可将上式代入式(9－110),同样也写作列矩阵形式,于是有

$$
\begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \\ x(4) \\ x(5) \\ x(6) \\ x(7) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0.65 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.27 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix} 0.38 \\ 0.92 \\ 0.92 \\ 0.38 \\ -0.38 \\ -0.92 \\ -0.92 \\ -0.38 \end{bmatrix}
$$

可见,经逆变换后,能够正确复原 $x(t)$ 的离散抽样值。

沃尔什变换与傅里叶变换在形式上和性质上有许多相同之处。例如,对于傅里叶变换满足帕塞瓦尔定理,也即在时域和频域中,同一信号能量守恒;对于沃尔什变换也满足帕塞瓦尔定理,在时域和序域中,同一信号也是能量守恒的,此定理可写成以下形式

$$
\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|x(n)|^2=\sum_{k=0}^{N-1}|X(k)|^2 \tag{9-113}
$$

沃尔什变换与傅里叶变换相比较,重要区别在于:沃尔什变换是实数变换,

而且沃尔什函数仅取+1，-1，实际上只需实数加、减法运算，傅里叶变换是复数变换；沃尔什变换的另一特点是正变换与逆变换的计算规律相同，仅有因子$\frac{1}{N}$的差别，因而使设备简化。

在傅里叶变换中，占有相当重要地位的卷积与相关定理，在沃尔什变换中却不存在直接的对应关系。为说明此特性，假定两个序列 $x(n)$与 $y(n)$的沃尔什变换分别为 $X(k)$与 $Y(k)$，下面分析 $X(k)$与 $Y(k)$的乘积 $Z(k)$的逆变换 $z(m)$与 $x(n)$和 $y(n)$有什么联系：

$$Z(k)=X(k)Y(k)$$

$$\begin{aligned}\mathrm{IDWT}[Z(k)]&=z(m)\\&=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)Y(k)\mathrm{Wal}(k,m)\\&=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}Y(k)\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\mathrm{Wal}(k,n)\cdot\mathrm{Wal}(k,m)\end{aligned}$$

借助沃尔什函数相乘特性公式，并交换上式中的求和顺序得到

$$\begin{aligned}z(m)&=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\left[\sum_{k=0}^{N-1}Y(k)\mathrm{Wal}(k,m\oplus n)\right]\\&=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)y(m\oplus n)\end{aligned}\tag{9-114}$$

显然，$z(m)$并非 $x(n)$与 $y(n)$之卷积，而是含有变量模二和运算的求和表示式，如式(9-114)，这样的运算也称为“并矢卷积”(dyadic convolution)。

在卷积表示式中，对于递推的延时项按变量的算术相减给出，而在并矢卷积中，递推延时改为变量的模二和。

由于模二和运算对加、减来说是相同的，因此，并矢相关运算与并矢卷积运算形式一样。

在实际应用中，经常用到由沃尔什变换经重排序号构成的沃尔什－哈德马变换，它的优点是便于实现快速算法，详见参考书目[1]第十章 10.3 节和 10.7 节。

(二) 二维沃尔什变换及其在数据压缩方面的应用

在二维变换的研究中，待变换之信号是一个二元函数。例如一张平面图像，需要纵、横两个坐标的变量来确定样点的位置。

设二维离散信号 $x(n_1,n_2)$，其自变量 n_1,n_2 分别取有限长 N_1 和 N_2，于是，共有样点 $N_1\times N_2$ 个。它的二维 DWT 定义如下式

$$X(k_1,k_2)=\frac{1}{N_1N_2}\sum_{n_2=0}^{N_2-1}\sum_{n_1=0}^{N_1-1}x(n_1,n_2)\cdot W(k_1,n_1)\cdot W(k_2,n_2)$$

$$(k_1=0,1,2,\cdots,N_1-1)$$

$$(k_2 = 0,1,2,\cdots,N_2-1) \tag{9-115}$$

二维 DWT 的逆变换定义为

$$x(n_1,n_2) = \sum_{n_2=0}^{N_2-1}\sum_{n_1=0}^{N_1-1} X(k_1,k_2)\cdot W(k_1,n_1)\cdot W(k_2,n_2)$$
$$(n_1 = 0,1,2,\cdots,N_1-1)$$
$$(n_2 = 0,1,2,\cdots,N_2-1) \tag{9-116}$$

式(9-115)与式(9-116)构成二维 DWT 变换对。

在实际应用中，常取 $N_1 = N_2 = N$，并写成矩阵形式，这时，二维序列 $x(n_1,n_2)$ 可表示为

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x(0,0) & x(0,1) & \cdots & x(0,N-1) \\ x(1,0) & x(1,1) & \cdots & x(1,N-1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x(N-1,0) & x(N-1,1) & \cdots & x(N-1,N-1) \end{bmatrix}$$

变换矩阵 $\boldsymbol{W}_N$ 仍如一维变换的形式[见式(9-107)]，二维 DWT 的矩阵表示式为

$$\boldsymbol{X} = \frac{1}{N^2}\boldsymbol{W}_N\boldsymbol{x}\boldsymbol{W}_N \tag{9-117}$$

逆变换的表达式写作

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{W}_N\boldsymbol{X}\boldsymbol{W}_N \tag{9-118}$$

利用正交特性可以证明上述变换对的正确性。将正变换式(9-117)代入逆变换式(9-118)之中得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{W}_N\boldsymbol{X}\boldsymbol{W}_N \\ &= \boldsymbol{W}_N\frac{1}{N^2}\boldsymbol{W}_N\boldsymbol{x}\boldsymbol{W}_N\boldsymbol{W}_N \\ &= \frac{1}{N}\boldsymbol{W}_N\boldsymbol{W}_N\boldsymbol{x}\,\frac{1}{N}\boldsymbol{W}_N\boldsymbol{W}_N \\ &= \boldsymbol{I}\boldsymbol{x}\boldsymbol{I} \\ &= \boldsymbol{x}\end{aligned}$$

式中 $\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵，这里用到沃尔什矩阵的正交性质，即

$$\frac{1}{N}\boldsymbol{W}_N\boldsymbol{W}_N = \boldsymbol{I}$$

正交变换的重要应用之一是数据压缩。所谓数据压缩就是在允许的统计误差范围内，以较窄的频带(或较短的时间)传送同样信息量的数据。近年来，数据压缩技术已广泛应用于图像传输、雷达、通信、生物医学等许多领域。

如果某离散信号由 N 个样值组成，为了可靠而有效地进行信息传递，必须在规定时间内完成 N 个数据的传输。当此信号取正交变换之后，虽然仍得到 N

个变换样值，然而，其分布特性却表现出某种能量集中，于是，允许删去某些样值不予传送，也不会引起明显的误差，这就达到了压缩数据的目的。下面举例说明，图像信号借助二维沃尔什变换进行数据压缩的原理。

设某平面图像经抽样后，二维序列的矩阵表示式为

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}0&1&1&0\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\0&1&1&0\end{bmatrix}\tag{9-119}$$

对此信号取二维 DWT，得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}&=\frac{1}{16}\boldsymbol{W}_4\boldsymbol{x}\boldsymbol{W}_4\\&=\frac{1}{16}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&-1&1\\1&-1&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&1&0\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\0&1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&-1&1\\1&-1&1&-1\end{bmatrix}\\&=\frac{1}{16}\begin{bmatrix}0&4&4&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&-1&1\\1&-1&1&-1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\end{aligned}\tag{9-120}$$

由式(9-120)可以看出，对于式(9-119)所给二维数据，经变换后，$\boldsymbol{X}$矩阵仅在左上部保留了一些元素，而其他大部分位置元素的取值是零。如果不传输抽样信号 x，而是传输它的变换矩阵，并且仅传输矩阵左上区的元素，这就有可能达到数据压缩的目的。至于左上部位的元素保留多少取决于容许的均方误差。

从物理概念上讲，正交变换方法实现数据压缩的依据是：利用了图像信号的统计特性，也即相邻抽样点之间有较强的相关性。原始数据分布愈均匀，经变换后数据愈集中于矩阵的左上角。正交变换使信号的能量集中特性得以显现。

为进一步阐明上述原理，考察 $N=2$ 的二维数据演算过程，再将所得结论推广至 $N=4$ 以及一般情况。

若平面图像抽样信号为

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x(0,0)&x(0,1)\\x(1,0)&x(1,1)\end{bmatrix}\tag{9-121}$$

取其二维 DWT,则

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{X} &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(0,0) & x(0,1) \\ x(1,0) & x(1,1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} x(0,0)+x(1,0) & x(0,1)+x(1,1) \\ x(0,0)-x(1,0) & x(0,1)-x(1,1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{9-122}
$$

至此可以看到,变换式经第一次相乘之后,在所得乘积矩阵的下部元素出现两个差值:$x(0,0)-x(1,0)$和 $x(0,1)-x(1,1)$。如果图像在垂直方向相邻样点取值相同,即 $x(0,0)=x(1,0)$和 $x(0,1)=x(1,1)$,则乘积矩阵下边两个元素等于零,只留下上边的两个元素,这样就把变换系数向上推移了,此结果表示已提取了图像在垂直方向相关性所含信息,使能量向上集中。回到式(9-122)继续运算

$$
\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} X(0,0) & X(0,1) \\ X(1,0) & X(1,1) \end{bmatrix} \tag{9-123}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
X(0,0) &= [x(0,0)+x(1,0)]+[x(0,1)+x(1,1)] \\
X(0,1) &= [x(0,0)+x(1,0)]-[x(0,1)+x(1,1)] \\
X(1,0) &= [x(0,0)-x(1,0)]+[x(0,1)-x(1,1)] \\
X(1,1) &= [x(0,0)-x(1,0)]-[x(0,1)-x(1,1)]
\end{aligned}
$$

经两次相乘后,得到变换矩阵 $\boldsymbol{X}$,各元素值为 $X(0,0)$, $X(0,1)$, $X(1,0)$, $X(1,1)$。如果图像在水平方向相邻样点取值相等,即 $x(0,0)=x(0,1)$和 $x(1,0)=x(1,1)$,则矩阵右边元素 $X(0,1)$与 $X(1,1)$也要等于零,它表明已提取了水平方向相关性所含信息,使能量向左边集中。在同时满足 $x(0,0)=x(0,1)=x(1,0)=x(1,1)$的条件下,也即图像是完全均匀分布的,则变换矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的各元素中,只有 $X(0,0)$不为零,其他右边、下边的元素都等于零,这就把变换系数集中于左上角。从上述分析看出:正交变换的过程提取了原始数据的相关性所含信息,因而有可能进行数据压缩。

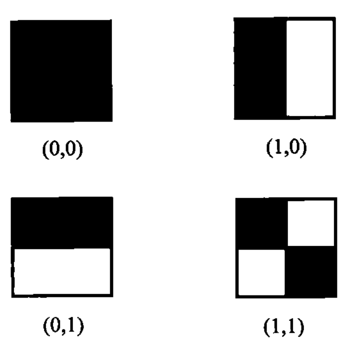


图 9-31　$N=2$ 的二维 DWT 基础图

上述变换过程还可利用较为形象的"基础图"来解释,$N=2$ 的二维 DWT 基础图共有$2\times2=4$ 张,如图 9-31 所示。图中,黑格子对应的样值为+1,白格子对应的样值是-1。每个基础图标注了相应的变换系数序号(k_1,k_2),其中,k_1 表示图像水平方向样值变号次数,k_2 表示图像在垂直方向样值变号次数。每张基

础图经相应的系数$X(k_1,k_2)$加权，再相加就可得到原二维离散数据构成之图形。很明显，对于完全均匀分布的平面图，只有加权系数$X(0,0)$不为零，其余系数都是零。因而，只需图 9 - 31 左上角一张基础图经加权就可给出原图像。

按照同样原理，在图 9 - 32 中画出了 $N=4$ 的二维 DWT 基础图，共 $4\times4=16$ 张。现在可以利用此基础图解释前面讨论的式(9 - 119)之变换结果式(9 - 120)。取 $X(0,0)$与 $X(2,0)$对应的两张基础图分别按系数$\frac{1}{2}$和$-\frac{1}{2}$加权(其余 14 个系数都是零)，再叠加即可得到原图像。

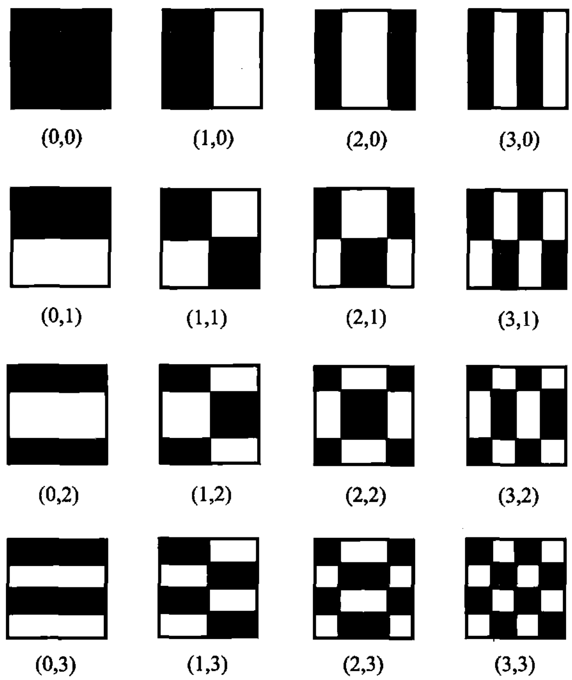


图 9 - 32 $N=4$ 的二维 DWT 基础图

必须指出，利用一维变换同样可以进行数据压缩。一维变换与二维变换实质上完成相同的运算，二维数据可以重新排列成一维数据来处理。例如，式(9 - 121)所给的二维数据可改写作一维信号($N=4$)

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x(0,0)\\x(0,1)\\x(1,0)\\x(1,1)\end{bmatrix}$$

进行一维 DWT 得到

$$\boldsymbol{X}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&-1&1\\1&-1&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(0,0)\\x(0,1)\\x(1,0)\\x(1,1)\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}x(0,0)+x(0,1)+x(1,0)+x(1,1)\\x(0,0)+x(0,1)-x(1,0)-x(1,1)\\x(0,0)-x(0,1)-x(1,0)+x(1,1)\\x(0,0)-x(0,1)+x(1,0)-x(1,1)\end{bmatrix}$$

可以看到，这里所得的 4 个变换系数与式(9－123)所得 4 个变换系数一一对应，只是排列顺序不一致。

上面以沃尔什变换为例初步说明了二维正交变换的构成原理及其在数据压缩方面的应用例子。用类似的方法可将这些概念运用于其他各种正交变换，如离散傅里叶变换和下节将要介绍的离散余弦变换等。

9.10 离散余弦变换(DCT)

在数字信号处理领域中，除了应用前面介绍的 DFT 和 DWT 之外，还有许多种离散正交变换被广泛采用，其中，离散余弦变换(DCT)日益受到重视，特别是在数字图像处理技术中，DCT 显示许多优点。

通常，以 DCT[$x(n)$]表示对离散时间序列 $x(n)$取一维离散余弦变换，为书写简短借助符号 $C(k)$表示 DCT[$x(n)$]。它的定义如下：

$$C(0)=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n=0}^{N-1}x(n) \tag{9-124}$$

$$C(k)=\sqrt{\frac{2}{N}}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\cos\left[\frac{(2n+1)k\pi}{2N}\right] \tag{9-125}$$

逆变换 IDCT[$C(k)$]$=x(n)$定义如下：

$$x(n)=\frac{1}{\sqrt{N}}C(0)+\sqrt{\frac{2}{N}}\sum_{k=1}^{N-1}C(k)\cos\left[\frac{(2n+1)k\pi}{2N}\right] \tag{9-126}$$

以上各式中序号

$n=0,1,2,\cdots,N-1$，共 N 个；

$k=0,1,2,\cdots,N-1$，也为 N 个。

从定义表达式容易看出，DCT 与 DFT 的计算有着密切联系，将余弦函数改写为复指数函数取实部的形式可导出如下关系：

$$C(k)=\sqrt{\frac{2}{N}}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\mathrm{Re}[\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{(2n+1)k\pi}{2N}}]$$
$$=\sqrt{\frac{2}{N}}\mathrm{Re}\Big[\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{(2n+1)k\pi}{2N}}\Big] \tag{9-127}$$

如果把 $x(n)$作如下的时域延拓，以 $x_e(n)$表示

$$x_e(n)=\begin{cases}x(n) & (n=0,1,2,\cdots,N-1)\\ 0 & (n=N,N+1,\cdots,2N-1)\end{cases} \tag{9-128}$$

则 DCT 定义表达式可改写为

$$C(0)=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n=0}^{2N-1}x_e(n) \tag{9-129}$$

$$C(k)=\sqrt{\frac{2}{N}}\sum_{n=0}^{2N-1}x_e(n)\cos\Big[\frac{(2n+1)k\pi}{2N}\Big]$$
$$=\sqrt{\frac{2}{N}}\ \mathrm{Re}\Big[\sum_{n=0}^{2N-1}x_e(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{(2n+1)k\pi}{2N}}\Big]$$
$$=\sqrt{\frac{2}{N}}\ \mathrm{Re}\Big[\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{k\pi}{2N}}\sum_{n=0}^{2N-1}x_e(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2kn\pi}{2N}}\Big]$$
$$=\sqrt{\frac{2}{N}}\ \mathrm{Re}[\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{k\pi}{2N}}X_e(k)] \tag{9-130}$$

式中 $X_e(k)$为 $x_e(n)$的 $2N$ 点 DFT。可见，为求得 DCT 正变换，可以先求序列 $x_e(n)$的 $2N$ 点 DFT(也即 FFT)，然后再求得 $C(k)$，这在实际问题中可按具体情况设计运算程序。

同理，在作逆 DCT 变换时，也可先在变换域把 $C(k)$作如下延拓，以 $C_e(k)$表示

$$C_e(k)=\begin{cases}C(k) & (k=0,1,2,\cdots,N-1)\\ 0 & (k=N,N+1,\cdots,2N-1)\end{cases} \tag{9-131}$$

于是，可导出 IDCT 表达式的另一种形式

$$x(n)=\frac{1}{\sqrt{N}}\ C_e(0)+\sqrt{\frac{2}{N}}\ \sum_{k=1}^{2N-1}C_e(k)\mathrm{Re}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{(2n+1)k\pi}{2N}}]$$
$$=\Big(\frac{1}{\sqrt{N}}-\sqrt{\frac{2}{N}}\Big)C_e(0)+\sqrt{\frac{2}{N}}\ \mathrm{Re}\Big\{\sum_{k=0}^{2N-1}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{k\pi}{2N}}C_e(k)]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2kn\pi}{2N}}\Big\} \tag{9-132}$$

这表明，为求得 IDCT，可先求$[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{k\pi}{2N}}C_e(k)]$的 IDFT(也即 IFFT)，然后再计算出 $x(n)$。

在数字图像信号处理的许多实际问题中，经常应用二维离散余弦变换。对

于 $N\times N$ 个样点的信号 $x(n_1,n_2)$二维 DCT 的表达式为

$$C(k_1,k_2)=\frac{2}{N}\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1}x(n_1,n_2)\cos\left[\frac{(2n_1+1)k_1\pi}{2N}\right]\cdot\cos\left[\frac{(2n_2+1)k_2\pi}{2N}\right] \tag{9-133}$$

式中序号 k_1 和 k_2 都不等于零，若 k_1 或 k_2 为零，二维 DCT 表达式如下：

$$C(0,0)=\frac{1}{N}\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-2}x(n_1,n_2) \tag{9-134}$$

$$C(0,k_2)=\frac{\sqrt{2}}{N}\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1}x(n_1,n_2)\cos\left[\frac{(2n_2+1)k_2\pi}{2N}\right] \tag{9-135}$$

$$C(k_1,0)=\frac{\sqrt{2}}{N}\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1}x(n_1,n_2)\cos\left[\frac{(2n_1+1)k_1\pi}{2N}\right] \tag{9-136}$$

与此相应，二维逆变换 IDCT 表达式为

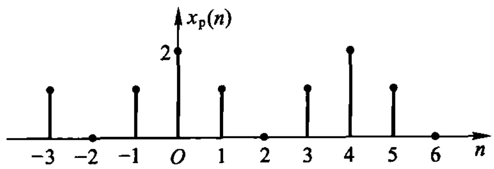
$$\begin{aligned}x(n_1,n_2)=&\frac{1}{N}C(0,0)+\frac{\sqrt{2}}{N}\sum_{k_2=1}^{N-1}C(0,k_2)\cos\left[\frac{(2n_2+1)k_2\pi}{2N}\right]+\\&\frac{\sqrt{2}}{N}\sum_{k_1=1}^{N-1}C(k_1,0)\cos\left[\frac{(2n_1+1)k_1\pi}{2N}\right]+\\&\frac{\sqrt{2}}{N}\sum_{k_1=1}^{N-1}\sum_{k_2=1}^{N-1}C(k_1,k_2)\cos\left[\frac{(2n_1+1)k_1\pi}{2N}\right]\cdot\\&\cos\left[\frac{(2n_2+1)k_2\pi}{2N}\right]\end{aligned} \tag{9-137}$$

在以上讨论中，DCT 的定义都以解析式给出，实际运算时可采用矩阵形式，得到比较简洁的表达式。

与 DFT 和 DWT 相比较，DCT 的变换特性可使信号经变换后更好地提取相关特性，从而有利于实现数据压缩。由于 DCT 变换矩阵更容易体现图像信号和人类语音的相关特性，因而被认为是一种“准最佳变换”(理论上的最佳变换难以完成实时运算，在工程实践中无法采用)。从运算速度考虑，由于 DWT 中省去了较多乘法运算，因而 DWT 略优于 DCT。然而，近年来在数字信号处理器硬件中，可以做到使乘法指令与加法指令速度一致，从而使 DWT 的优势不明显。综合考虑以上因素，DCT 已成为目前在数字图像或语音信号处理领域中应用相当广泛的一种离散正交变换。

习　　题

9-1　题图 9-1 所示周期序列 $x_p(n)$，周期 $N=4$，求 $\mathrm{DFS}[x_p(n)]=X_p(k)$。



题图 9－1

9－2 若周期序列 $x_p(n)$ 为实数序列，则 DFS$[x_p(n)]=X_p(k)$ 呈共轭对称性，即 $X_p(k)=X_p^*(-k)$。试证明此特性。

9－3 若实数周期序列 $x_p(n)$ 是 n 的偶函数，则 $X_p(k)$ 也是实数序列且为 k 的偶函数。试证明此特性。

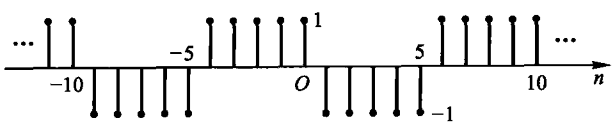
9－4 周期性实序列 $x_p(n)$ 如题图 9－4 所示，判断下述各论点是否正确。

(1) $X_p(k)=X_p(k+10)$

(2) $X_p(k)=X_p(-k)$

(3) $X_p(0)=0$

(4) $X_p(k)e^{j\left(\frac{2\pi}{5}\right)k}$，对于所有的 k 此式为实数



题图 9－4

9－5 如果 $x_p(n)$ 是一个周期为 N 的序列，也是周期为 $2N$ 的序列，令 $X_{p1}(k)$ 表示当周期为 N 时的 DFS 系数，$X_{p2}(k)$ 是当周期为 $2N$ 时的 DFS 系数。试以 $X_{p1}(k)$ 表示 $X_{p2}(k)$。

9－6 已知周期序列 $x_p(n)$ 如题图 9－1 所示。取其主值序列构成一个有限长序列 $x(n)=x_p(n)R_N(n)$，求 $x(n)$ 的离散傅里叶变换 $X(k)=\mathrm{DFT}[x(n)]$。

9－7 任意假设一个实周期序列 $x_p(n)$，其周期为 N。若 $x(n)=x_p(n)R_N(n)$，绘出 $x((-n))_N$ 序列。

9－8 若已知有限长序列 $x(n)$ 如下式

$$x(n)=\begin{cases}1 & (n=0)\\ 2 & (n=1)\\ -1 & (n=2)\\ 3 & (n=3)\end{cases}$$

求 $\mathrm{DFT}[x(n)]=X(k)$，再由所得结果求 $\mathrm{IDFT}[X(k)]=x(n)$，验证你的计算是正确的。建议写作矩阵形式。

9－9 用闭式表达以下有限长序列的 DFT。

(1) $x(n)=\delta(n)$

(2) $x(n)=\delta(n-n_0)\quad(0<n_0<N)$

(3) $x(n)=a^nR_N(n)$

9－10　用闭式表达以下有限长序列的 DFT。

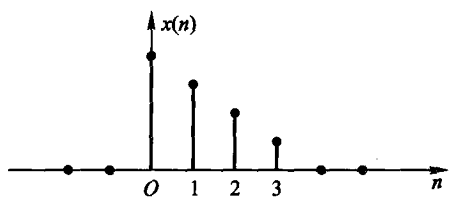
(1) $x(n)=e^{j\omega_0 n}R_N(n)$

(2) $x(n)=\sin(\omega_0 n)R_N(n)$

(3) $x(n)=\cos(\omega_0 n)R_N(n)$

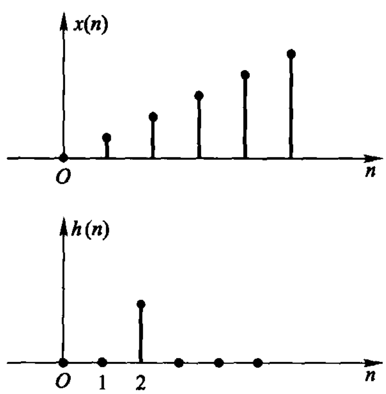
(4) 对于 $\omega_0=\frac{2\pi}{N}$的特定条件，重复以上各问

9－11　一有限长序列 $x(n)$如题图 9－11 所示，绘出 $x_1(n)$和 $x_2(n)$序列，其中$x_1(n)=x((n-2))_4R_4(n)$，$x_2(n)=x((-n))_4R_4(n)$。



题图 9－11

9－12　两个有限长序列 $x(n)$与 $h(n)$如题图 9－12 所示，绘出长度为 6 的圆卷积。



题图 9－12

9－13　证明频移定理(式 9－41)。

9－14　已知有限长序列 $x(n)$，DFT$[x(n)]=X(k)$，试利用频移定理求：

(1) $\mathrm{DFT}\left[x(n)\cos\left(\frac{2\pi ln}{N}\right)\right]$

(2) $\mathrm{DFT}\left[x(n)\sin\left(\frac{2\pi ln}{N}\right)\right]$

9－15 利用例 9－3 的结果，分别求该例中的 DFT[$x(n)$]，DFT[$h(n)$]，DFT[$y(n)$]，验证时域圆卷积定理。

9－16 证明频域圆卷积定理（式 9－47）。

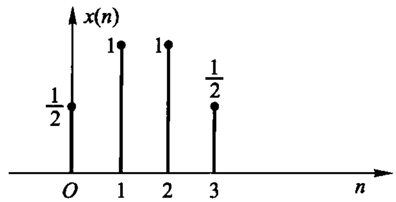
9－17 题图 9－17 示出 $N=4$ 之有限长序列 $x(n)$，试绘图解答：

(1) $x(n)$与 $x(n)$之线卷积；

(2) $x(n)$与 $x(n)$之 4 点圆卷积；

(3) $x(n)$与 $x(n)$之 10 点圆卷积；

(4) 欲使 $x(n)$与 $x(n)$的圆卷积和线卷积相同，求长度 L 之最小值。



题图 9－17

9－18 已知两有限长序列：

$$x(n)=\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)R_N(n)$$

$$h(n)=\sin\left(\frac{2\pi n}{N}\right)R_N(n)$$

用直接卷积和 DFT 两种方法分别求：

(1) $y(n)=x(n)\circledast h(n)$；

(2) $y(n)=x(n)\circledast x(n)$；

(3) $y(n)=h(n)\circledast h(n)$ （圆卷积长度仍取 N 点循环）。

9－19 若 $x(n)$为纯虚序列，DFT[$x(n)$]$=X(k)$，分解为实部与虚部写作 $X(k)=X_r(k)+\mathrm{j}X_i(k)$。试证明 $X_r(k)$是 k 的奇函数，$X_i(k)$是 k 的偶函数。

9－20 证明表 9－2 中除第 1 行以外的其余几条性质。

9－21 若已知实数有限长序列 $x_1(n)$，$x_2(n)$，其长度都为 N：

$$\mathrm{DFT}[x_1(n)]=X_1(k)$$

$$\mathrm{DFT}[x_2(n)]=X_2(k)$$

$$x_1(n)+\mathrm{j}x_2(n)=x(n)$$

$$\mathrm{DFT}[x(n)]=X(k)$$

试证明下列关系式成立：

$$X_1(k)=\frac{1}{2}[X(k)+X^*(N-k)]$$

$$X_2(k)=\frac{1}{2\mathrm{j}}[X(k)-X^*(N-k)]$$

9－22 已知 $x(n)=R_N(n)$，求 $X(k)=\mathrm{DFT}[x(n)]$，利用所得到的结果验证帕塞瓦尔定理。

9－23 证明 DFT 的对称性质：

若 DFT[$x(n)$]$=X(k)$则

$$\mathrm{DFT}[X(n)]=Nx((-k))_N R_N(n)$$

9－24 若 $x(n)=R_N(n)$（矩形序列），求：

(1) $\mathscr{Z}[x(n)]$；

(2) DFT[$x(n)$]；

(3) 频响特性 $X(e^{j\omega})$，作幅度特性曲线图。

9-25 设 $x(n)$为一有限长序列，当 $n<0$ 和 $n\geqslant N$ 时 $x(n)=0$，且 N 等于偶数。已知 $\mathrm{DFT}[x(n)]=X(k)$，试利用 $X(k)$来表示以下各序列的 DFT。

(1) $x_1(n)=x(N-1-n)$

(2) $x_2(n)=(-1)^n x(n)$

(3) $x_3(n)=\begin{cases} x(n) & (0\leqslant n\leqslant N-1) \\ x(n-N) & (N\leqslant n\leqslant 2N-1) \\ 0 & (n\text{ 为其他值}) \end{cases}$ （k 为偶数）

(4) $x_4(n)=\begin{cases} x(n)+x\left(n+\dfrac{N}{2}\right) & \left(0\leqslant n\leqslant \dfrac{N}{2}-1\right) \\ 0 & (n\text{ 为其他值}) \end{cases}$

(5) $x_5(n)=\begin{cases} x(n) & (0\leqslant n\leqslant N-1) \\ 0 & (N\leqslant n\leqslant 2N-1) \\ 0 & (n\text{ 为其他值}) \end{cases}$

（DFT 有限长度取 $2N$，k 取偶数。）

(6) $x_6(n)=\begin{cases} x\left(\dfrac{n}{2}\right) & (n\text{ 为偶数}) \\ 0 & (n\text{ 为奇数}) \end{cases}$

（DFT 有限长度取 $2N$）

(7) $x_7(n)=x(2n)$ $\left(\text{DFT 有限长度取}\dfrac{N}{2}\right)$

9-26 库利-图基 FFT 算法也可解释为 $\boldsymbol{W}$ 矩阵的分解简化，例如 $N=4$ 可写出

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(2) \\ X(1) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & W^0 & 0 & 0 \\ 1 & -W^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W^1 \\ 0 & 0 & 1 & -W^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^0 \\ 1 & 0 & -W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -W^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix}$$

试证明此矩阵表示式与式(9-76)一致。并指出此矩阵相乘的过程与前面哪一张 FFT 流程图相对应。

9-27 修改流程图 9-15，仍要求 $N=8$，但输入序列为自然顺序，输出序列为码位倒读顺序。

9-28 同习题 9-27，但输入、输出序列都为自然顺序。这种算法有何缺陷。

9-29 画出 $N=16$ 的库利-图基 FFT 流程图，输入序列按码位倒读顺序排列，输出为自然顺序排列。

9-30 推导按频率抽取 FFT 算法（桑德-图基算法）的表示式。先由定义写出 $X(k)$，再将其中的 $x(n)$按前后两半分开（而不是奇、偶分开），最后得到 $X(k)$按奇、偶分开的两部分

$$X(k)=X(2r)+X(2r+1)$$

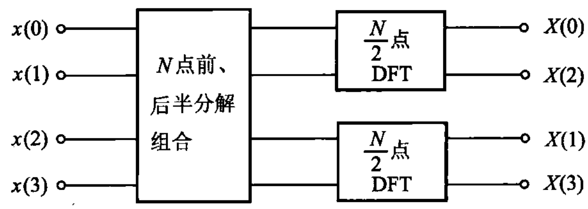
其中

$$\begin{cases} X(2r) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} H(n) W_{\frac{N}{2}}^{nr} \\ X(2r+1) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} G(n) W_{\frac{N}{2}}^{nr} \end{cases}$$

$$\begin{cases} H(n) = x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right) \\ G(n) = \left[x(n) - x\left(n + \frac{N}{2}\right)\right] W_N^n \end{cases}$$

$$\left(其中\ n = 0, 1, \cdots, \frac{N}{2} - 1\right)$$

9-31 $N=4$ 的桑德-图基算法方框图如题图 9-31 所示。试根据习题 9-30 导出的结果,将此方框图画为蝶形流程图。



题图 9-31

9-32 将习题 9-31 的结果修改为输出自然顺序、输入为码位倒读顺序的流程图。

9-33 将习题 9-31 的结果修改为输入、输出都按自然顺序排列的流程图。讨论(比较)以上三种桑德-图基 FFT 算法的优劣。

9-34 有一 FFT 处理器,用来估算实数信号的频谱。要求指标:

(1) 频率间的分辨力 $f_1 \leqslant 5$ Hz;

(2) 信号的最高频率$\leqslant 1.25$ kHz;

(3) 点数 N 必须是 2 的整数次方。

试确定:

(1) 记录长度 T_1;

(2) 抽样点间的时间间隔 T_s;

(3) 一个记录过程的点数 N。

9-35 分别求下示二维数据的二维 DWT,并利用基础图分析、讨论所得变换数据之特点。

(1) $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ (2) $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ (3) $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

9-36 在 9.10 节给出了利用 DFT 计算 DCT 的方法,在该方法中,将 N 点的时间序列补零延拓至 $2N$ 点。另一种用 DFT 求 DCT 的方法是将 N 点序列延拓至 $4N$ 点(注意考虑如何补零),试导出计算公式并说明这样做有何好处。

第十章　模拟与数字滤波器

10.1 引　　言

通过前面各章学习，已初步建立了对信号进行“滤波”的概念，并且认识到滤波器在信号传输与信号处理中的重要地位和作用。然而，这些讨论仅着重理想滤波器的模型、特性以及对简单系统进行频响特性分析，还没有涉及工程实际问题中有关滤波器的构成原理和设计方法。本章将在前几章的基础上进一步研究根据工程实际中提出的频响特性指标，如何确定满足要求的滤波器结构及其参数。

从系统的角度观察，下面将要讨论的滤波器都应当是可实现的线性时不变系统。如果利用模拟电路直接对模拟信号进行处理则构成“模拟滤波器”，它是一个连续时间系统。如果利用离散时间系统对数字信号（时域离散、幅度量化的信号）进行滤波则构成“数字滤波器”。

考虑到在本章中可能同时研究模拟与数字两种类型的滤波器，为避免符号混淆，以 $H(\mathrm{j}\Omega)$ 或 $H_{\mathrm{a}}(\mathrm{j}\Omega)$ 表示模拟滤波器的系统函数，而以 $H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$ 或 $H_{\mathrm{d}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$ 表示数字滤波器的系统函数。

按照上述符号规律绘出模拟滤波器的方框图如图 10－1 所示，输入－输出信号的频域关系为 $R(\mathrm{j}\Omega)=H_{\mathrm{a}}(\mathrm{j}\Omega)E(\mathrm{j}\Omega)$，其中 $H_{\mathrm{a}}(\mathrm{j}\Omega)=|H_{\mathrm{a}}(\mathrm{j}\Omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\Omega)}$。

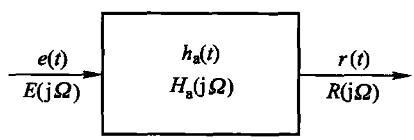


图 10－1　模拟滤波器示意图

在实际应用中，往往借助数字滤波方法处理模拟信号，这时的原理框图如图 10－2所示。图中，模拟信号 $x_{\mathrm{a}}(t)$ 经限带滤波后再通过 A/D 转换完成抽样与量化，由此形成的数字信号经数字滤波器实现信号处理的要求，将处理后的数字信号经D/A转换和平滑滤波得到输出的模拟信号 $y_{\mathrm{a}}(t)$。

与模拟滤波器相比较，数字滤波器在体积、重量、精度、稳定性、可靠性、存储功能、灵活性以及性能价格比等方面都显示明显的优点，而且，数字滤波器除利用硬件电路实现之外还可借助计算机以软件编程方式实现。正因为这些特点，在许多情况下，人们宁可利用图 10－2 的间接方式处理模拟信号，而舍弃传统的



图 10-2 模拟信号的数字处理框图

模拟电路。随着数字技术的发展,模拟滤波器的应用领域已逐步减少,然而,在有些情况下模拟滤波器还有一定的应用场合(如工作频率在几十兆赫以上的中频或射频通信电路),模拟与数字滤波器也可以混合应用(如图 10-2 中的带限滤波与平滑滤波还是模拟电路)。此外,数字滤波器的构成原理和设计方法往往要从模拟滤波器已经成熟的技术转换而来,因此,仍需适当学习模拟滤波器的基本概念。

按照从简单到复杂的认识规律,掌握滤波器设计原理的过程包括以下几个层次:

(1) 从模拟滤波器到数字滤波器;

(2) 从理想滤波器到实际可实现电路,在具体实现过程中利用“逼近”函数满足所需指标;

(3) 从无源电路到有源电路;

(4) 从一端口电路到二端口电路;

(5) 从归一化参数值到实际参数值;

(6) 从低通滤波到高通、带通和带阻滤波。

本章按照以上几个方面展开 10.2 节至 10.8 节的讨论,重点在 10.2 节、10.6 节和 10.7 节。

除上述模拟与数字两大类型的滤波器之外,还有一种直接对离散时间信号(仅时间离散、未转换成数字信号)进行处理的滤波电路。其中,“开关电容滤波器”具有一定代表性,且近年来应用日趋广泛,10.9 节将介绍这种大规模集成滤波电路原理。

从 20 世纪初至今,在通信与电子系统中,滤波器的研究和应用历经了漫长、艰辛而曲折的道路。本书试图选择最需理解的基本知识和最具应用潜力的实现方法组成本章的内容,给出从滤波器原理到设计的初步概念,显然,许多具体、深入、丰富的内容还未能涉及。此外,本章与前面许多章节有着密切联系,通过学习滤波器可对已学过的各章进行综合复习,初步体验如何把信号与系统的基本理论和方法付诸应用。

10.2 模拟滤波器的逼近

如果给定系统的结构及其参数,求激励作用下系统的响应,这类问题称为系统分析,本书前面讨论的问题基本上属于系统分析问题。通常,无源模拟电路(由 R,L,C 和理想变压器组成)也称无源模拟网络,对此类系统的分析就称为无源模拟网络分析。

与网络分析问题相对应的是网络综合,这类问题是给出激励信号与响应,求满足此要求的具体网络结构及其参数,或者说给出网络的系统函数 $H_a(s)=\frac{R(s)}{E(s)}$,求此网络。显然综合问题要比分析问题复杂和困难,而且得出的结果往往不是惟一的。

早在20世纪20年代已经形成了 LC 滤波器的设计方法,该方法称为"影像参数法",它的特点是方法简单,但各方面性能缺陷较大,目前已很少采用,本书不予讨论。

这里将要介绍的综合方法称为"插入衰减法"或"工作参数法"(有时也简称为"综合设计法")。用这种方法设计滤波器的过程可以按以下两步工作完成:第一步是根据给定的频率响应特性寻求一种可实现的有理函数 $H_a(s)$,使它满足设计要求,这类问题称为"逼近"(approximation)。通常,频响特性的要求可借助频域容差图描述,标明所需滤波器与理想滤波器的容许误差。以低通为例,此种容差图如图 10-3 所示。图中,通带内允许 $|H_a(j\Omega)|$ 与理想值偏差为 δ_1;阻带衰减不为零,容许不超过 δ_2;在频率 Ω_p 与 Ω_s 之间为过渡带,由通带到阻带之间逐渐过渡。$|H_a(j\Omega)|$ 曲线应落在此容许误差范围之内。例如,一种可能的 $|H_a(j\Omega)|$ 函数如图中曲线所示。显然,为满足给定的容差要求,答案并非惟一的。第二步工作是由选定的 $H_a(s)$ 实现二端口网络(即所需滤波器)的电路结构和参数值。本节只讨论"逼近"原理,而将模拟电路实现的问题留待10.3节和10.4两节研究。

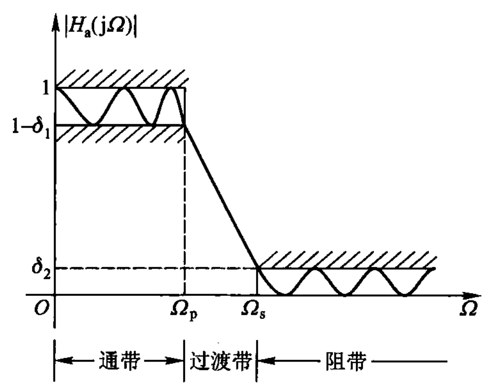


图 10-3 低通滤波器设计频域容差图

这里将要介绍的逼近原理虽然是针对模拟滤波器讲述的,然而,对于数字滤波器设计也同样适用(在10.6节将要看到)。因此,可以说这一节是学习全章的

重要基础。

前文已述，所谓逼近就是要按给定的频响特性选择适当的 $H_a(s)$，以满足容差要求。经过长期的研究与实践，人们已经选定了若干种典型的 $H_a(s)$ 函数，可以很好地适应不同特点频响特性的要求，因而在一般情况下并不需要滤波器设计者重新建立 $H_a(s)$ 函数式。

这些工作的理论分析在20世纪30年代末就已完成，然而，繁琐、冗长的数字计算使它难以付诸实用。到50年代，由于计算机技术的逐步成熟，求出了大量设计参数和图表，这种方法才得到广泛应用。设计者只要根据给定的容差要求，查索相应的图表，即可得到符合要求的滤波器电路结构及元件参数。在下面的讨论中读者将感受到这种方法的特色。

对于典型的可实现 $H_a(s)$ 函数，往往是先给定 $|H_a(\mathrm{j}\Omega)|^2$，由此寻找 $H_a(s)$，下面先解决这一问题，然后分别介绍两种目前应用最广的典型 $H_a(s)$ 逼近函数。

(一) 给定频率特性模平方 $|H_a(\mathrm{j}\Omega)|^2$，求系统函数 $H_a(s)$

待求的 $H_a(s)$ 应满足系统稳定性要求，而且希望 $h_a(t)=\mathscr{L}^{-1}[H_a(s)]$ 是 t 的实函数，这样 $H_a(\mathrm{j}\Omega)$ 具有共轭对称性，$H_a(\mathrm{j}\Omega)=H_a^*(-\mathrm{j}\Omega)$，由此得

$$\begin{aligned}|H_a(\mathrm{j}\Omega)|^2\big|_{\mathrm{j}\Omega=s}&=H_a(\mathrm{j}\Omega)H_a^*(\mathrm{j}\Omega)\big|_{\mathrm{j}\Omega=s}\\&=H_a(\mathrm{j}\Omega)H_a(-\mathrm{j}\Omega)\big|_{\mathrm{j}\Omega=s}\\&=H_a(s)H_a(-s)\end{aligned}\qquad(10-1)$$

这表明 $H_a(s)H_a(-s)$ 的零、极点分布对 $\mathrm{j}\Omega$ 轴呈镜像对称分布，如图10-4所示。考虑到 $H_a(s)$ 的分子、分母多项式都是 s 的实系数多项式，因此复数的零、极点必定呈共轭分布，即对实轴也呈对称分布。在这些零、极点中，有一半属于 $H_a(s)$，另一半则属于 $H_a(-s)$。如果要求系统稳定，则左半平面的极点属于 $H_a(s)$。在挑选零点时，若不加任何限制条件，则满足 $|H_a(\mathrm{j}\Omega)|^2$ 解的 $H_a(s)$ 就是多个。如果限定 $H_a(s)$ 是最小相位的，则只能取所有左半平面的零、极点作为 $H_a(s)$ 的零、极点，这样 $H_a(s)$ 的解就是惟一的。

例 10-1 给定滤波器特性的模平方函数

$$|H_a(\mathrm{j}\Omega)|^2=\frac{k^2(1+\Omega^2)}{[(\mathrm{j}\Omega+2)^2+4][(\mathrm{j}\Omega-2)^2+4]}$$

求具有最小相位特性的系统函数 $H_a(s)$。

解 按式(10-1)将 $\Omega=\frac{s}{\mathrm{j}}$ 代入式中得到

$$H_a(s)H_a(-s)=\frac{k^2(1-s^2)}{[(s+2)^2+4][(s-2)^2+4]}$$

可见，此函数式有四个极点，分别位于 $s=\pm2\pm\mathrm{j}2$ 处，它们对于实轴和虚轴都呈对称分布；而零点有两个，分别位于 s 为 $+1$ 和 -1 两处。取左半平面零、极

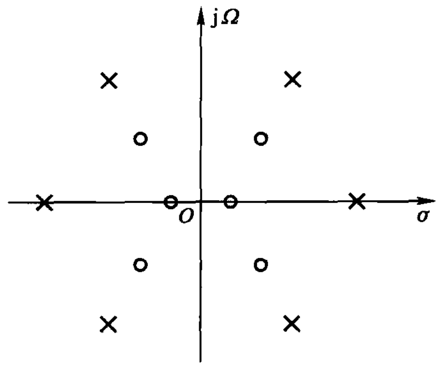


图 10-4　$H_a(s)H_a(-s)$零、极点分布示例

点构成 $H_a(s)$如下式

$$H_a(s)=\frac{k(s+1)}{(s+2)^2+4}$$

式中,k 是一个常系数,它不影响频响特性曲线的相对变化关系。

(二) 最平响应特性滤波器——巴特沃思(Butterworth)滤波器

巴特沃思滤波器是最基本的逼近函数形式之一。它的幅频特性模平方为

$$|H_a(j\Omega)|^2=\left[\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}}\right] \tag{10-2}$$

式中 N 是滤波器的阶数;Ω_c 是滤波器的截止角频率,当 $\Omega=\Omega_c$ 时,$|H_a(j\Omega)|^2=\frac{1}{2}$。在下面对频率特性的分析中,将进一步理解这两个参数的重要作用。

不同阶次 N 的巴特沃思滤波特性如图 10-5 所示,这一幅频特性具有下列特点:

(1) 最大平坦性:可以证明:在 $\Omega=0$ 点,它的前$(2N-1)$阶导数都等于零,这表示巴特沃思滤波器在 $\Omega=0$ 附近一段范围内是非常平直的,它以原点的最大平坦性来逼近理想低通滤波器,“最平响应”即由此而得名。

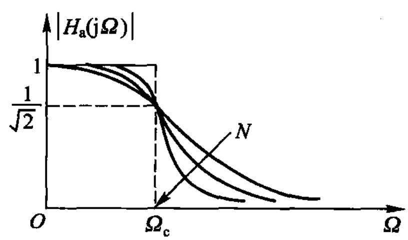


图 10-5　巴特沃思滤波器幅频特性

(2) 频响曲线的单调下降特性:无论在通带、阻带(或过渡带)都具有此特征。这是巴特沃思逼近函数的重要属性。稍后,

我们将看到其他逼近函数曲线可能具有起伏之情况。

(3) 滤波器的截止频率(3 dB 带宽):由式(10-2)可以计算,当 $\Omega=\Omega_c$ 时 $|H_a(j\Omega)|^2=\frac{1}{2}$,称为半功率点。也可求得幅度的相对衰减量为

$$20\lg|H_a(j\Omega)|=20\lg\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-3\text{dB}$$

无论阶数 N 取何值,巴特沃思滤波器的 3dB 带宽都是相同的,即位于 $\Omega=\Omega_c$。

(4) 滤波器幅频特性与阶数 N 的关系:随着 N 值的增大,频带边缘下降越陡峭,更加接近理想滤波特性。当 $\Omega>\Omega_c$ 之后,特性曲线近似以 20 NdB/倍频程之速度下降(习题 10-1)。虽然增加 N 可以改善衰减性能,而付出的代价是实现电路的元件数量也要增加(见 10.4 节)。也即,选择较小的 N 可能不满足衰减特性之要求,而 N 过大可能消耗更多元件数量。在后面的实例计算中我们将要看到,在确定的逼近函数形式之下,设计滤波器的关键任务就是选择合理的阶数 N。

(5) 具有良好的相频特性,在通带内没有起伏,比较接近直线。

下面根据式(10-2)并考虑式(10-1)建立巴特沃思滤波器的系统函数 $H_a(s)$ 表达式。令 $\Omega=\frac{s}{j}$ 代入式(10-2)得到

$$|H_a(j\Omega)|^2\Big|_{\Omega=\frac{s}{j}}=H_a(s)H_a(-s)$$

$$=\frac{1}{1+\left(\frac{s}{j\Omega_c}\right)^{2N}}=\frac{1}{1+(-1)^N\left(\frac{s}{\Omega_c}\right)^{2N}} \qquad (10-3)$$

显然 $|H_a(s)|^2$ 的极点 s_k 应位于

$$\left(\frac{s_k}{\Omega_c}\right)^{2N}=\begin{cases}+1 & (N\text{ 为奇数})\\ -1 & (N\text{ 为偶数})\end{cases} \qquad (10-4)$$

之处,具体讲,当 N 为奇数时 s_k 的模应等于 Ω_c,幅角等于 $\frac{1}{2N}(2\pi)$ 的整数倍,所以

$$s_k=\Omega_c e^{j\left(\frac{k\pi}{N}\right)} \qquad (10-5)$$

(式中, $k=1,2,3,\cdots,2N$)

而 N 为偶数时, s_k 的模仍应等于 Ω_c,幅角为 $\frac{1}{2N}$ 乘以 π 的奇数倍,即

$$s_k=\Omega_c e^{j\left[\frac{(2k-1)\pi}{2N}\right]} \qquad (10-6)$$

(式中, $k=1,2,3,\cdots,2N$)

以上两式也可改用另一种形式表达，即对于 N 不分奇偶都满足

$$s_k = \Omega_c e^{j\left[\frac{(2k-1)\pi}{2N}+\frac{\pi}{2}\right]} \tag{10-7}$$

（式中，$k=1,2,3,\cdots,2N$）

我们将式(10－7)的推证留给读者自行研究(习题 10－2)。

极点 s_k 的分布具有如下规律：

(1) $H_a(s)H_a(-s)$的 $2N$ 个极点以$\frac{\pi}{N}$为间隔均匀分布在半径为 Ω_c 的圆周上，这个圆称为巴特沃思圆。

(2) 所有极点以 $j\Omega$ 轴为对称轴成对称分布。由于不可能出现$\frac{k\pi}{N}=\pm\frac{\pi}{2}$($N$ 为奇数)或$\frac{(2k-1)\pi}{2N}=\pm\frac{\pi}{2}$($N$ 为偶)，所以虚轴上没有极点。

(3) 当 N 为奇数时，有两个极点分布在 $s=\pm\Omega_c$ 的实轴上；而 N 为偶数时，实轴上没有极点。所有复数极点两两呈共轭对称分布。

图 10－6 画出了 $N=2$ 和 $N=3$ 两种情况的 $H_a(s)H_a(-s)$函数极点分布。而全部零点都位于 $s=\infty$处。

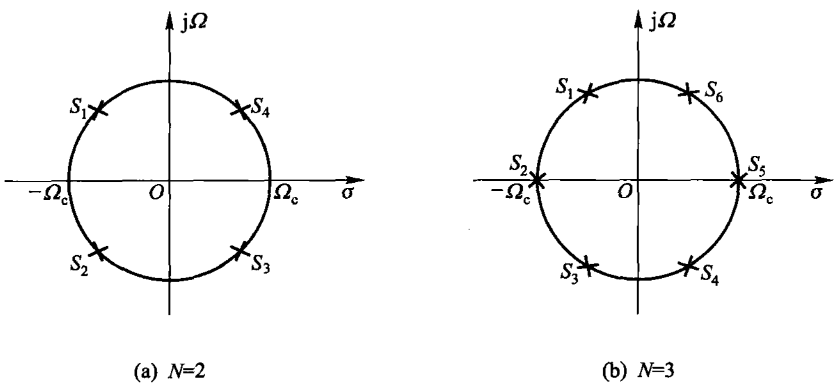


图 10－6　巴特沃思滤波器极点分布

为简化分析过程我们对系统函数表达式进行归一化处理。为此，令 $s'=\frac{s}{\Omega_c}$，s'称为归一化复频率。此时，图 10－6 中的巴特沃思圆半径简化为单位圆($\Omega_c=1$)。与此相应，也可对频率 Ω 进行归一化，令 $\Omega'=\frac{\Omega}{\Omega_c}$为归一化频率值，此时滤波器的截止频率等于 1。

为了从 $H_a(s')H_a(-s')$极点分布导出稳定的系统函数 $H_a(s')$，取全部左半平面极点即可写出 $H_a(s')$表达式

$$H_a(s') = \frac{1}{\prod_{k=1}^{N}(s' - s'_k)} \tag{10-8}$$

式中，s'_k 为位于左半平面的极点值，共有 N 个。下面以 $N=2$ 为例导出 $H_a(s')$ 函数式。

按照式(10-6)可求得 $H_a(s')H_a(-s')$ 之极点共有四个，位于

$$s'_k = e^{j\frac{1}{4}\pi},\quad e^{j\frac{3}{4}\pi},\quad e^{j\frac{5}{4}\pi},\quad e^{j\frac{7}{4}\pi}$$

取 $e^{j\frac{3}{4}\pi}$ 和 $e^{j\frac{5}{4}\pi}$ 两极点构成 $H_a(s')$

$$H_a(s') = \frac{1}{B_2(s')} \tag{10-9}$$

$$\begin{aligned} B_2(s') &= (s' - e^{j\frac{3}{4}\pi})(s' - e^{j\frac{5}{4}\pi}) \\ &= (s')^2 - 2\cos(\frac{3}{4}\pi)s' + 1 = (s')^2 + \sqrt{2}s' + 1 \end{aligned}$$

也即

$$H_a(s') = \frac{1}{(s')^2 + \sqrt{2}s' + 1} \tag{10-10}$$

此处的 $B_2(s')$ 称为巴特沃思多项式，仿照上例方法可求得 N 为任意值时的 $B_2(s')$ 表达式，制成相应的表格（见表 10-1）备用。容易想到，这里导出的式(10-10)就是第八章 8.11 节用到的式(8-125)——二阶巴特沃思滤波器系统函数。

表 10-1 巴特沃思多项式表

N	$B_N(s') = a_N(s')^N + a_{N-1}(s')^{N-1} + \cdots + a_1 s' + a$
1	$s' + 1$
2	$(s')^2 + \sqrt{2}s' + 1$
3	$(s')^3 + 2(s')^2 + 2s' + 1$
4	$(s')^4 + 2.6131(s')^3 + 3.4142(s')^2 + 2.6131s' + 1$
5	$(s')^5 + 3.2361(s')^4 + 5.2361(s')^3 + 5.2361(s')^2 + 3.2361s' + 1$
6	$(s')^6 + 3.8637(s')^5 + 7.4641(s')^4 + 9.1416(s')^3 + 7.4641(s')^2 + 3.8637s' + 1$
7	$(s')^7 + 4.4940(s')^6 + 10.0978(s')^5 + 14.5918(s')^4 + 14.5918(s')^3 +$ $10.0978(s')^2 + 4.4940s' + 1$

例 10-2 给定模拟滤波器技术指标（参看图 10-7）：

通带内允许起伏：-1 dB　　$0 \leqslant \Omega \leqslant 2\pi \times 10^4$ rad/s

阻带衰减：$\leqslant -15$ dB　　$\Omega \geqslant 2\pi \times 2 \times 10^4$ rad/s

求用巴特沃思滤波器实现时所需阶数 N、截止角频率 Ω_c 和 $H_a(s)$ 表示式。

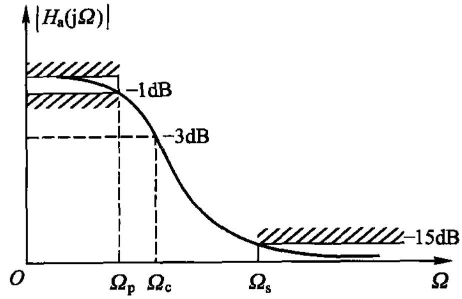


图 10－7 例 10－2 巴特沃思滤波器设计

解 本例给出的两个约束条件是限定了滤波器通带与阻带边界的两个衰减量，分别以对应的频率值 Ω_p 和 Ω_s 表示，已示于图中。

必须注意，在本例中 －3dB 衰减点（对应频率 Ω_c 值）并未规定为阻带边界，这并不影响前文关于巴特沃思频响特性一般表达式之运用，此处的 Ω_c 可理解为过渡带内一个特定的频率点，如图 10－7 所示。

下面将利用式(10－2)进行计算。首先将给定衰减量的分贝值换算为电压比。即 －1dB 对应 $10^{-\frac{1}{20}}$，而 －15dB 对应 $10^{-\frac{15}{20}}$。由此建立一组联立方程式，待求未知量是 N 和 Ω_c。

(1) 求阶数 N，将两组数据分别代入式(10－2)得到联立方程并求出 N 值

$$\begin{cases} |H_a(j\Omega_p)| = \dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{2\pi\times 10^4}{\Omega_c}\right)^{2N}}} = 10^{-\frac{1}{20}} \\ |H_a(j\Omega_s)| = \dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{2\pi\times 2\times 10^4}{\Omega_c}\right)^{2N}}} = 10^{-\frac{15}{20}} \end{cases}$$

$$N = \frac{\lg\left(\dfrac{10^{\frac{15}{10}}-1}{10^{\frac{1}{10}}-1}\right)}{2\lg\left(\dfrac{2\pi\times 2\times 10^4}{2\pi\times 10^4}\right)} = 3.443$$

取整后得到要求的阶数 $N=4$。

(2) 求 －3 dB 截止角频率 Ω_c，以 $N=4$ 代入 $|H_a(j\Omega_s)|$ 表达式得到

$$|H_a(j\Omega_s)| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{2\pi\times 2\times 10^4}{\Omega_c}\right)^{2\times 4}}} = 10^{-\frac{15}{20}}$$

$$\Omega_c=\frac{2\pi\times 2\times 10^4}{\sqrt[8]{10^{\frac{15}{10}}-1}}\ \mathrm{rad/s}=2\pi\times 1.304\times 10^4\ \mathrm{rad/s}$$

按 $N=4$ 设计的结果,其通带实际特性优于给定之指标。

(3) 求滤波器系统函数 $H_a(s)$。由表 10-1 查到 $N=4$ 的巴特沃思多项式 $B_N(s')$,即可写出 $H_a(s')$,再经解归一化,即令 $\frac{s}{\Omega_c}=s'$代入$H_a(s')$后得到

$$H_a(s)=\frac{4.506\times 10^{19}}{s^4+2.14\times 10^5 s^3+2.292\times 10^{10}s^2+1.437\times 10^{15}s+4.506\times 10^{19}}$$

按照常规的设计任务,下一步应该是根据 $H_a(s)$表达式实现 LC 电路结构和参数。我们将在 10.4 节的例 10-8 研究这个问题。

(三) 通带等波纹滤波器——切比雪夫(Chebyshev) Ⅰ 型滤波器

用巴特沃思滤波特性对理想低通滤波器逼近时,在通带内误差分布是不均匀的,靠近频带边缘误差最大。下面将要介绍的通带等波纹滤波器逼近原则是使通带内误差分布均匀。这种滤波器的幅频特性模平方为

$$|H_a(j\Omega)|^2=\left[\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2 T_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)}}\right]^2 \tag{10-11}$$

式中 ε 是决定通带内起伏大小的波纹参数,$T_N(x)$是第一类切比雪夫多项式,定义为

$$T_N(x)=\begin{cases}\cos(N\arccos x) & |x|\leqslant 1\\ \cosh(N\operatorname{arcosh} x) & |x|>1\end{cases} \tag{10-12}$$

表 10-2 列出了对应不同阶次 N 时的切比雪夫多项式 $T_N(x)$。图 10-8 画出了 $T_1(x)\sim T_4(x)$多项式特性曲线,从这组特性曲线可以看出:$|x|\leqslant 1$ 时,$T_N(x)$在 ± 1 之间波动;N 不论为何值都有 $T_N(1)=1$;当 $x>1$,$T_N(x)$单调上升。此外切比雪夫多项式满足下列递推公式

$$T_{N+1}(x)=2xT_N(x)-T_{N-1}(x),N=1,2,\cdots \tag{10-13}$$

表 10-2 $N=0\sim 7$ 时切比雪夫多项式 $T_N(x)$

N	$T_N(x)$	N	$T_N(x)$
0	1	4	$8x^4-8x^2+1$
1	x	5	$16x^5-20x^3+5x$
2	$2x^2-1$	6	$32x^6-48x^4+18x^2-1$
3	$4x^3-3x$	7	$64x^7-112x^5+56x^3-7x$

图 10-9(a)是按式(10-11)画出的切比雪夫等波纹滤波器的幅频特性,图

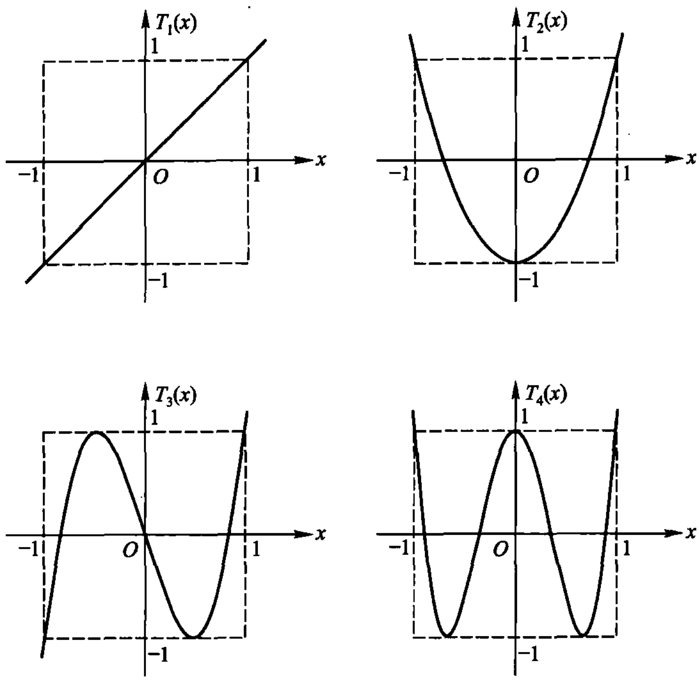


图 10-8　$T_1(x)\sim T_4(x)$切比雪夫特性曲线

10-9(b)是通带内起伏与 $T_N(\Omega')$的关系。(此处 Ω'为归一化角频率 $\Omega'=\dfrac{\Omega}{\Omega_c}$)。

切比雪夫滤波器的滤波特性具有下列特点:

(1) 所有曲线在 $\Omega=\Omega_c$ 时通过$\dfrac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$点,因而把 Ω_c 定义为切比雪夫滤波器的截止角频率。

(2) 在通带内 $\left|\dfrac{\Omega}{\Omega_c}\right|\leqslant 1$, $|H_a(\mathrm{j}\Omega)|$ 在 1 和$\dfrac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$之间变化;在通带外,$\left|\dfrac{\Omega}{\Omega_c}\right|>1$,特性呈单调下降,下降速度为 $20N$ dB/dec。

(3) N 为奇数,$H_a(\mathrm{j}0)=1$;N 为偶数,$H_a(\mathrm{j}0)=\dfrac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$。通带内误差分布是均匀的,实际上这种逼近称为最佳一致逼近。或者说通带等波纹滤波器是在通带内以最大误差最小化对理想低通滤波器的最佳一致逼近。

(4) 与巴特沃思滤波器定义的截止角频率 Ω_c(衰减 3 dB 处)不同,切比雪夫

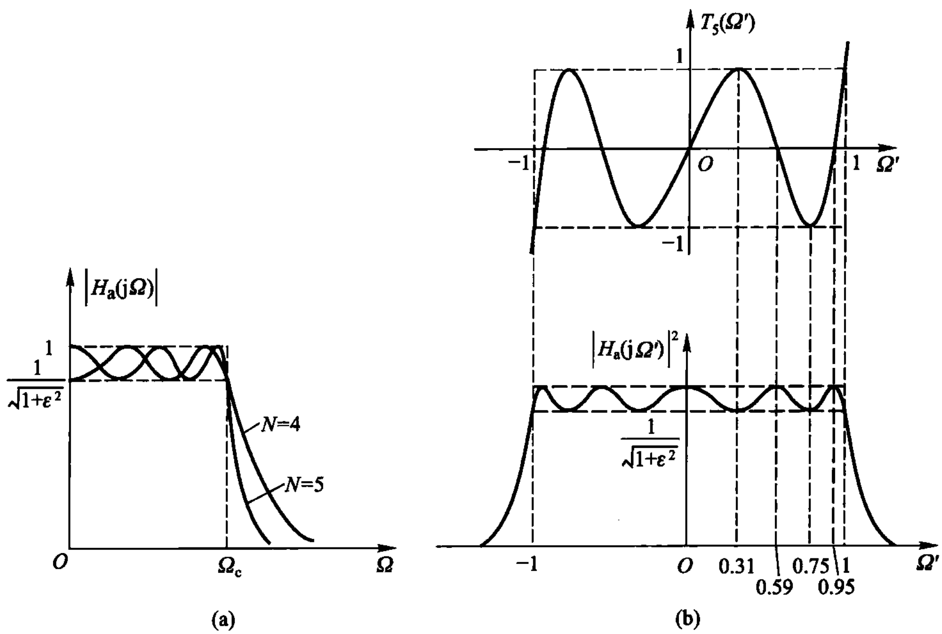


图 10-9 切比雪夫滤波特性及通带内波纹与 $T_N(\Omega')$ 关系

滤波器的 Ω_c 是与 ε 有关的通带边缘频率值，其衰减之绝对值在 3 dB 以内。一般情况下有 $\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}>\frac{1}{\sqrt{2}}$。也即衰减为 3 dB 之频率点已从通带进入过渡区而趋近于阻带。不难求得，此时(−3 dB)处的角频率值应为

$$\Omega_{(-3\text{ dB})}=\Omega_c\cosh\left[\frac{1}{N}\operatorname{arcosh}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right] \tag{10-14}$$

(5) 由于滤波器通带内有起伏，因而使通带内的相频特性也有相应的起伏波动，即相位是非线性的，这给信号传输时带来线性畸变，所以在要求群时延为常数时不宜采用这种滤波器。

通常称这种通带内具有等波纹特性，阻带为单调下降的滤波特性为切比雪夫Ⅰ型；若通带特性为单调变化，阻带内呈等波纹变化则称切比雪夫Ⅱ型；若通带和阻带都呈现等波纹变化则称为椭圆滤波器。这里只介绍切比雪夫Ⅰ型滤波器，并简称为切比雪夫滤波器。

与巴特沃思滤波器类似，可能根据式(10−11)求切比雪夫滤波器的系统函数 $H_a(s)$。

很明显，这里的计算过程要比巴特沃思逼近函数复杂得多。下面逐步依次分析求解

（1）将 $\Omega=\frac{s}{\mathrm{j}}$ 代入式(10-11)，同时，为使符号简化引用归一化参数令 $s'=\frac{s}{\Omega_c}$ 得到

$$H_a(s')H_a(-s')=\frac{1}{1+\varepsilon^2T_N^2\left(\frac{s'}{\mathrm{j}}\right)} \tag{10-15}$$

为找到极点分布位置需要求解方程

$$1+\varepsilon^2T_N\left(\frac{s'}{\mathrm{j}}\right)=0$$

也即

$$T_N\left(\frac{s'}{\mathrm{j}}\right)=\pm\mathrm{j}\frac{1}{\varepsilon} \tag{10-16}$$

（2）注意到切比雪夫多项式的定义是利用了 cos 运算构成的复合函数。在此引入中间变量 θ 并取余弦函数，同时将 θ 分解为实部 α 和虚部 β。令

$$\begin{aligned}\frac{s'}{\mathrm{j}}&=\cos\theta=\cos(\alpha+\mathrm{j}\beta)\\&=(\cos\alpha)\cosh\beta-\mathrm{j}(\sin\alpha)\sinh\beta\end{aligned}$$

s' 也写作实部 σ' 和虚部 Ω' 之组合，于是得到

$$s'=\sigma'+\mathrm{j}\Omega'=(\sin\alpha)\sinh\beta+\mathrm{j}(\cos\alpha)\cosh\beta \tag{10-17}$$

（3）把 $\frac{s}{\mathrm{j}}=\cos\theta$ 代入式(10-12)，并按照式(10-16)的约束求出极点位置

$$\begin{aligned}T_N\left(\frac{s'}{\mathrm{j}}\right)&=\cos\left[N\arccos\left(\frac{s'}{\mathrm{j}}\right)\right]=\cos(N\theta)\\&=\cos(N\alpha)\cosh(N\beta)-\mathrm{j}\sin(N\alpha)\sinh(N\beta)=\pm\mathrm{j}\frac{1}{\varepsilon}\end{aligned}$$

解得

$$\begin{cases}\cos(N\alpha)\cosh(N\beta)=0\\ \sin(N\alpha)\sinh(N\beta)=\pm\dfrac{1}{\varepsilon}\end{cases} \tag{10-18}$$

满足上式的 α 和 β 分别为

$$\begin{cases}\alpha=\dfrac{2k-1}{N}\times\dfrac{\pi}{2}\quad k=1,2,\cdots,2N\\ \beta=\pm\dfrac{1}{N}\operatorname{arsinh}\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)\end{cases} \tag{10-19}$$

把 α,β 代回式(10-17)，即可完成极点之求解

$$\begin{aligned}s_k'=\sigma_k'+\mathrm{j}\Omega_k'=&\pm\sin\left(\frac{2k-1}{2N}\pi\right)\sinh\left[\frac{1}{N}\operatorname{arsinh}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]+\\&\mathrm{j}\cos\left(\frac{2k-1}{2N}\pi\right)\cosh\left[\frac{1}{N}\operatorname{arsinh}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]\end{aligned} \tag{10-20}$$

$$k=1,2,\cdots,2N$$

当给定 ε,N 之后即可按上式求出 $H_a(s')H_a(-s')$ 函数之极点 s'_k 分布,取 k 从 1 至 $2N$ 得到 $2N$ 个极点。

(4) 切比雪夫逼近函数之极点分布在 s 平面上呈椭圆。下面给出证明。对式(10-20)两端取平方,利用正弦函数平方与余弦函数平方之和等于 1 之特性,可以求得

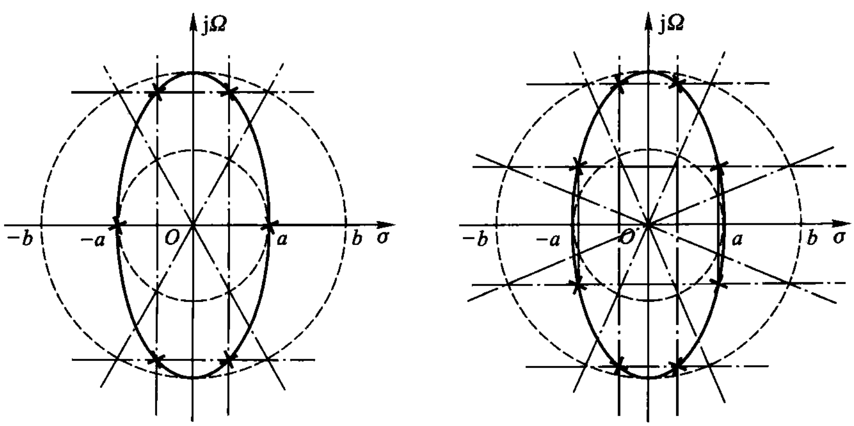
$$\frac{\sigma'^2_k}{\sinh^2\left[\frac{1}{N}\mathrm{arsinh}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]}+\frac{\Omega'^2_k}{\cosh^2\left[\frac{1}{N}\mathrm{arsinh}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]}=1 \qquad (10-21)$$

这是一个椭圆方程,其短轴 a 和长轴 b 分别等于

$$\begin{cases} a=\sinh\left[\frac{1}{N}\mathrm{arsinh}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right] \\ b=\cosh\left[\frac{1}{N}\mathrm{arsinh}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right] \end{cases} \qquad (10-22)$$

图 10-10 举例示出 $N=3$ 和 $N=4$ 时切比雪夫滤波器的极点分布。极点所在的椭圆可以和半径为 a 的圆以及半径为 b 的圆联系起来。这两个圆分别称为巴特沃思小圆和巴特沃思大圆。N 阶切比雪夫滤波器极点的纵坐标($\mathrm{j}\Omega'_k$)等于 N 阶巴特沃思大圆极点的纵坐标,而横坐标(σ'_k)等于 N 阶巴特沃思小圆极点的横坐标。

在以上推导中出现的 θ,α,β 以及 a,b 都是为协助求解或说明结果特性而引入的中间符号。极点位置仅由 ε,N 两参量确定。



(a) N=3　　(b) N=4

图 10-10　切比雪夫滤波器极点分布

(5) 取左半平面之极点，即 s_k' 的实部 σ_k' 只取负值得到 N 个极点

$$\begin{cases} \sigma_k' = -a\sin\left(\dfrac{2k-1}{2N}\pi\right) \\ \Omega_k' = b\cos\left(\dfrac{2k-1}{2N}\pi\right) \end{cases} \tag{10-23}$$

$$k = 1, 2, \cdots, N$$

其中，a，b 由式(10-22)决定(受 ε、N 约束)。

以此 N 个极点即可构成切比雪夫滤波器的系统函数

$$H_a(s') = \frac{A}{\prod_{k=1}^{N}(s' - s_k')} \tag{10-24}$$

式中 $s_k' = \sigma_k' + j\Omega_k'$。分子中的 A 为一常数，稍后说明。

将 s_k' 值代入分母各因式相乘展开后可得 s' 的 N 阶多项式，一般形式为

$$\prod_{k=1}^{N}(s' - s_k') = (s')^N + a_{N-1}(s')^{N-1} + \cdots + a_1 s' + a_0 \tag{10-25}$$

对于给定的 ε，N 值可求得多项式各系数 a 值，制成表格备查。表 10-3(a)示出 $\varepsilon = 0.50885$(对应波纹为 1 dB)，N 从 1 至 7 的系数 a 值，而表 10-3(b)是 $\varepsilon = 0.99763$(对应波纹为 3 dB)的系数 a 值。

表 10-3 切比雪夫 I 型低通原型滤波器分母多项式

(a) 1 dB 波纹，$\varepsilon = 0.508\,85$

N	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
1	1.965 2						
2	1.102 5	1.097 7					
3	0.491 3	1.238 4	0.988 3				
4	0.275 6	0.742 6	1.453 9	0.952 8			
5	0.122 8	0.580 5	0.974 4	1.688 8	0.936 8		
6	0.068 9	0.307 1	0.939 3	1.202 1	1.930 8	0.928 3	
7	0.030 7	0.213 7	0.548 6	1.357 5	1.428 8	2.176 1	0.923 1

(b) 3 dB 波纹，$\varepsilon = 0.99763$

N	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
1	1.002 4						
2	0.707 9	0.644 9					
3	0.250 6	0.928 3	0.597 2				
4	0.177 0	0.404 8	1.169 1	0.581 6			
5	0.062 6	0.407 9	0.548 9	1.415 0	0.574 4		
6	0.044 2	0.163 4	0.699 1	0.690 6	1.662 8	0.570 7	
7	0.015 7	0.146 2	0.300 0	1.051 8	0.831 4	1.911 6	0.568 4

A 的取值应满足 $H_a(j\Omega')$ 的直流增益特性。在前文特性说明的第(3)部分曾给出 N 为奇数和偶数两种情况下直流增益表达式，将该式用于此处之式(10-24)可得

$$\begin{cases} H_a(j0) = 1 = \dfrac{A}{a_0} & (N\text{ 为奇数}) \\ H_a(j0) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} = \dfrac{A}{a_0} & (N\text{ 为偶数}) \end{cases} \tag{10-26}$$

也即

$$\begin{cases} A = a_0 & (N\text{ 为奇数}) \\ A = \dfrac{a_0}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} & (N\text{ 为偶数}) \end{cases} \tag{10-27}$$

这一结果是切比雪夫与巴特沃思滤波器的明显不同之处，对于巴特沃思函数与此相应的 A 值恒等于 1。

例 10-3 设计满足下列技术指标的切比雪夫Ⅰ型低通滤波器：

通带允许起伏：-1 dB　　$0 \leqslant \Omega \leqslant 2\pi \times 10^4$ rad/s

阻带衰减：　$\leqslant -15$ dB　　$\Omega \geqslant 2\pi \times 2 \times 10^4$ rad/s

解 (1) 求波纹起伏参数 ε：

$$|H_a(j\Omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} = 10^{-\frac{1}{20}}$$

解得

$$\varepsilon = 0.508\ 85$$

(2) 求阶数 N：通带边缘角频率 $\Omega_c = 2\pi \times 10^4$ rad/s，阻带边缘角频率 $\Omega_s = 2\pi \times 2 \times 10^4$ rad/s，按衰减要求有：

$$|H_a(j\Omega_s)| = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2 T_N^2\left(\dfrac{2\pi \times 2 \times 10^4}{2\pi \times 10^4}\right)}} = 10^{-\frac{15}{20}}$$

$$T_N(2) = \cosh(N \operatorname{arcosh} 2) = \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{10^{\frac{15}{10}} - 1} = 10.8751$$

求得

$$N = \frac{\operatorname{arcosh}\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\sqrt{10^{\frac{15}{10}} - 1}\right)}{\operatorname{arcosh} 2} = 2.34$$

取 $N = 3$。

(3) 求 $H_a(s)$：

按本题要求，即 1 dB 波纹、$N = 3$，查表 10-3(a)，同时利用式(10-27)求得分子 A 值，得出归一化的切比雪夫逼近函数 $H_a(s')$

$$H_a(s')=\frac{0.491\ 3}{(s')^3+0.988\ 3(s')^2+1.238\ 4s'+0.491\ 3}$$

令$\frac{s}{\Omega_c}=s'$代入去归一化求得

$$H_a(s)=\frac{1.218\ 7\times10^{14}}{s^3+6.210\ 4\times10^4s^2+4.889\ 3\times10^9s+1.218\ 7\times10^{14}}$$

本例的 LC 电路实现将在 10.4 节例 10-9 继续讨论。

以上讨论的两种逼近函数都是从满足设计者幅频特性要求给出的,在工程应用中按此种要求建立的逼近函数还有切比雪夫Ⅱ型(阻带内等波纹、通带内单调变化)和椭圆函数型(通带、阻带都为等波纹)等逼近方式。此外,还可从相频特性的要求寻找逼近函数,如逼近线性相位(最平群时延特性)的贝塞尔滤波器以及为补偿系统非线性相移而引出的各种均衡器等。限于篇幅,本书不作介绍。

10.3 无源一端口模拟网络综合

在 10.2 节开始曾述及滤波器综合设计的原理包括两部分内容。一是“逼近”问题,也即由滤波特性之要求选择逼近函数,求出滤波器的 $H_a(s)$;二是“实现”问题,也即由选定的 $H_a(s)$设计电路结构及参数。上述第一个问题已在10.2节解决,本节和下一节研究第二个问题。

通常,滤波器大多是由二端口网络(四端网络)构成,而它的分析与实现必须以一端口网络综合理论为基础。本节先研究一端口网络综合的基本知识,接下来在 10.4 节讨论二端口网络综合原理,并给出滤波器实际应用的设计例子。

所谓一端口网络是指激励和响应在网络的同一端口上,它的系统函数称为策动点函数。如果网络是无源的,则策动点函数实际上是阻抗函数 $Z(s)=\frac{V(s)}{I(s)}$或导纳函数 $Y(s)=\frac{I(s)}{V(s)}$。这里仅就无源无损 LC 网络(图 10-11)举出综合方法实例,为下节滤波器(二端口网络)综合作准备。

对于 LC 一端口网络有两种综合方法,第一种称为福斯特(Foster)综合法,它的原理是对 $Z(s)$或 $Y(s)$表达式作部分分式展开,展开后的每一项对应非常简单的电路结构,经相加组合(对应串联或并联)即可实现所需网络结构(习题 10-10)。第二种称为考尔(Cauer)综合法,它的电路结构呈梯形网络,下面举例说明考尔综合法的实现原理。

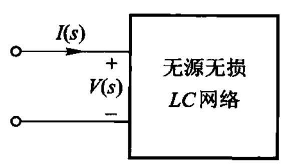


图 10-11 一端口无损 LC 网络

例 10－4 求图 10－12 所示网络的输入阻抗，其中串臂阻抗分别为 Z_1，Z_3，Z_5，并臂导纳为 Y_2，Y_4，负载电阻是 R_L。

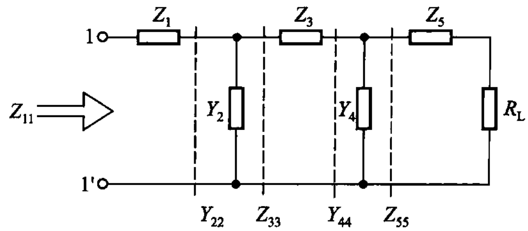


图 10－12 考尔梯形综合原理图

解 设各臂连接处向负载方向看去的阻抗或导纳为如图 10－12 所标注的值，可以写出

$$\begin{cases} Z_{55}=Z_5+R_L \\ Y_{44}=Y_4+\dfrac{1}{Z_{55}} \\ Z_{33}=Z_3+\dfrac{1}{Y_{44}} \\ Y_{22}=Y_2+\dfrac{1}{Z_{33}} \\ Z_{11}=Z_1+\dfrac{1}{Y_{22}} \end{cases}$$

最后得到利用连分式表示的输入阻抗函数

$$Z_{11}=Z_1+\cfrac{1}{Y_2+\cfrac{1}{Z_3+\cfrac{1}{Y_4+\cfrac{1}{Z_5+R_L}}}} \tag{10－28}$$

这一表示式就是考尔型一端口 LC 梯形网络实现的基础。

例 10－5 给定一端口网络输入阻抗 $Z(s)$为

$$Z(s)=\frac{3s^3+6s^2+6s+3}{2s^2+4s+3}$$

试将 $Z(s)$写作连分式形式，并综合为梯形结构。

解 将 $Z(s)$的分子多项式与分母多项式辗转相除

$$
\begin{array}{r|l}
 & \frac{3}{2}s \\
2s^2+4s+3 & 3s^3+6s^2+6s+3 \\
 & \underline{3s^2+6s^2+\frac{9}{2}s} \\
 & \frac{3}{2}s+3
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
 & \frac{4}{3}s \\
\frac{3}{2}s+3 & 2s^2+4s+3 \\
 & \underline{2s^2+4s} \\
 & 3
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
 & \frac{1}{2}s+1 \\
3 & \frac{3}{2}s+3 \\
 & \underline{\frac{3}{2}s+3} \\
 & 0
\end{array}
$$

这样 $Z(s)$可表示为

$$Z(s)=\frac{3}{2}s+\cfrac{1}{\frac{4}{3}s+\cfrac{1}{\frac{1}{2}s+1}}$$

实现此 $Z(s)$函数的梯形网络结构如图 10－13 所示。这种实现结构称为考尔Ⅰ型结构，它适于网络极点是 $s=\infty$的情况，也就是分子多项式比分母多项式阶次高的策动点函数。

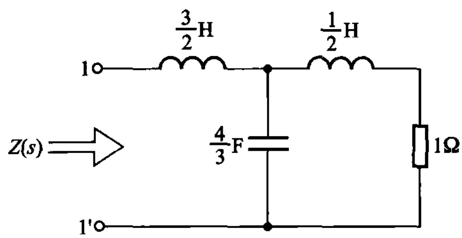


图 10－13　$Z(s)$的考尔Ⅰ型实现

例 10－6　给定一端口网络导纳函数

$$Y(s)=\frac{33s^4+56s^2+12}{12s^5+38s^3+12s}$$

试将 $Y(s)$表示成连分形式，并综合为梯形结构。

解　本题与例 10－5 的区别在于分母是关于 s 的奇次多项式，而且 $s=0$ 是 $Y(s)$的极点，辗转相除时改用升幂排列，得到如下的 $Y(s)$表达式

$$Y(s)=\frac{1}{s}+\cfrac{1}{\frac{2}{3s}+\cfrac{1}{\frac{3}{4s}+\cfrac{1}{\frac{2}{s}+\cfrac{1}{\frac{1}{s}}}}}$$

画出实现此 $Y(s)$函数的梯形结构如图 10－14 所示。这种实现称为考尔Ⅱ型结构。

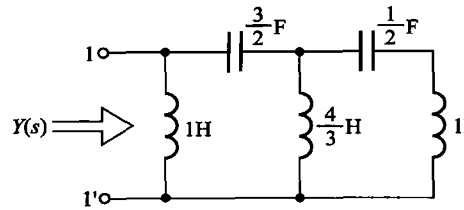


图 10－14 $Y(s)$的考尔Ⅱ型实现

必须指出,并不是所有可实现的 $Z(s)$或 $Y(s)$都能用连分式表示,例如对于有互感的网络就没有对应的梯形结构实现。

在研究网络综合问题时必须注意到“可实现性”问题,也即对给定的$H_a(s)$,并非都可实现相应的电路。下面首先从系统稳定性的要求考虑这一问题。

一般情况下系统函数表达式为

$$H_a(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0} \tag{10-29}$$

其中分子、分母多项式系数都为正实系数。如果系统是稳定的,则分母多项式 $A(s)$满足下列特性:

(1) 所有零点(即系统函数极点)在 s 平面的左半开平面内;

(2) 如果有零点在 $j\Omega$ 轴上,则是单阶的。

为叙述方便,把具备这两条件的 $A(s)$统称为霍尔维茨(Hurwitz)多项式。若必须区分二者,将具备特性(1) 的 $A(s)$称为严格的霍尔维茨多项式,同时具备这两条件的正实系数多项式称为广义霍尔维茨多项式。如果系统是稳定的,它的必要条件是分母必须是霍尔维茨多项式。

对稳定系统 $H_a(s)$的另一限制是分子、分母多项式的阶次,当 $s\to\infty$,式(10－29)近似为

$$H_a(s)\big|_{s\to\infty}\approx\frac{b_m s^m}{a_n s^n}=\frac{b_m}{a_n}s^{m-n}$$

若 $m>n$,则 $s=\infty$是 $H_a(s)$的极点,其阶次是$(m-n)$,由于 $j\Omega$ 轴延伸至无限远处,$s=\infty$这一点可以认为位于 $j\Omega$ 轴上,因而按稳定条件,$j\Omega$ 轴上的极点只能是单阶的,所以$(m-n)$最多等于 1,亦即稳定系统的系统函数 $H_a(s)$分子的阶次比分母阶次最多只能高一次。同理由于 $s=0$ 也在虚轴上,因此$H_a(s)$分母的最低阶次与分子最低阶次之差也不能超过一次。

如果 $H_a(s)$是策动点阻抗或导纳函数,由于它们互为倒数,因此 $H_a(s)$的分

子和分母多项式都必须是霍尔维茨多项式，而且阶数之差不能超过1次。因而策动点函数是两个霍尔维茨多项式之比的有理函数。

上面从系统稳定性角度对一般系统函数和策动点函数提出了满足稳定性的条件。对一端口无源网络的可实现性还应该有“无源性”要求，它体现在网络函数表示式上，对所有 Ω，有 $\mathrm{Re}[H_a(\mathrm{j}\Omega)]\geqslant 0$。这是由于在正弦稳态情况，若输入电流有效值为 $|I|$，则送入网络的功率为 $P=|I|^2\mathrm{Re}[H_a(\mathrm{j}\Omega)]$，无源网络自身并不产生功率，因而有 $P\geqslant 0$，也即 $\mathrm{Re}[H_a(\mathrm{j}\Omega)]\geqslant 0$（等号适用于无损 LC 网络）。

以上讨论了一端口无源网络策动点函数的一些性质，了解这些性质对于正确认识网络函数的特点是有益的，但这还不是可实现的充分与必要条件。

1931年布隆（Brune）给出了可实现策动点函数的充要条件（此处略去证明）：

$$\begin{cases}(1)\ \text{当 } s \text{ 为实数时}(\Omega=0),H_a(s)\text{是实数};\\(2)\ \text{若 } \mathrm{Re}[s]\geqslant 0,\text{则 } \mathrm{Re}[H_a(s)]\geqslant 0。\end{cases}\tag{10-30}$$

满足这两条件的函数称为“正实函数”。其中条件(1)（实部分）用视察法容易验证，只要 $H_a(s)$ 的系数是实系数；而条件(2)（正部分）检验比较困难，但它可以用下列变更的等效条件来检验：

$$\begin{cases}(1)\ H_a(s)\text{的分母是霍尔维茨多项式};\\(2)\ H_a(s)\text{在虚轴上的极点是单阶的，并且具有正实留数};\\(3)\ \text{对所有 } \Omega,\text{有 } \mathrm{Re}[H_a(\mathrm{j}\Omega)]\geqslant 0。\end{cases}\tag{10-31}$$

用式(10-31)条件来检验“正部分”，其方便之处是只要求对 $H_a(\mathrm{j}\Omega)$ 在 $\mathrm{j}\Omega$ 轴上进行检验，免去对右半平面的逐点检验。

条件式(10-30)表示的正实函数还具有下列性质：

(1) 若 $H_a(s)$ 是正实函数，则 $\dfrac{1}{H_a(s)}$ 也是一个正实函数；

(2) 几个正实函数之和仍为正实函数（但两个正实函数之差不一定是正实函数）。

容易看出，电阻 R、感抗 sL 和容抗 $\dfrac{1}{sC}$ 都是正实函数，因而由这些元件串、并联后得到的阻抗或导纳函数都是正实的，即无源线性网络 $H_a(s)$ 必定是正实函数。反之，正实函数才是无源线性网络的可实现网络函数。

10.4 无源二端口模拟网络综合

一般滤波器都是二端口网络。典型 LC 无损二端口网络如图10-15所示，其中 R_S 和 R_L 分别为信号源内阻和负载电阻，这种电路也称为达林顿

(Darlington)电路结构(由 S.Darlington 于 1939 年提出)。达林顿电路可以是端接源电阻 R_S,而负载电阻 $R_L=0$;也可以是端接 R_L,而 $R_S=0$;一般情况如图 10-15 所示,我们仅局限于两端都接电阻的电路综合。

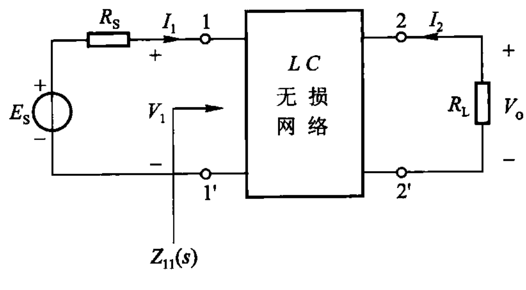


图 10-15 达林顿电路结构

从下面的分析将要看到,二端口网络的综合原理是以一端口网络综合原理为基础的,或者说,要把达林顿电路结构的设计转化为一个一端口网络的实现问题。在图 10-15 中这个一端口网络的输入阻抗以 $Z_{11}(s)$表示。

我们先讨论这种综合方法的一般原理,然后将它用于巴特沃思和切比雪夫滤波器的实际设计。

(一) 二端口网络综合设计原理

这里的约束条件是已经选定的系统函数 $H_a(s)$,要把它转换为一端口网络的阻抗 $Z_{11}(s)$需要借助功率传输的反射概念,为此引入反射系数 $\rho(s)$。与此同时,还需考虑到内阻 R_S 与负载 R_L 的影响。

(1) 由二端口网络系统函数 $H_a(s)$建立反射系数 $\rho(s)$

对图 10-15 所示电路结构,滤波器插在负载电阻 R_L 和内阻为 R_S 的信源之间,因而工作时,其功率传输会由于滤波器的插入而产生衰减,这一衰减用工作传输函数 $K(\mathrm{j}\Omega)$描述。若信号源的资用功率(即信号源能给出的最大功率)为

$$P_m=\frac{1}{2}\left(\frac{|E_S|^2}{4R_S}\right) \tag{10-32}$$

插入滤波器后,负载上实际得到的功率为

$$P_L=\frac{1}{2}\frac{|V_o|^2}{R_L} \tag{10-33}$$

将上述两者的比值定义为工作传输函数,表示为

$$|K(\mathrm{j}\Omega)|^2=\frac{P_L}{P_m}=\frac{4R_S}{R_L}\left|\frac{V_o(\mathrm{j}\Omega)}{E_S(\mathrm{j}\Omega)}\right|^2 \tag{10-34}$$

其中把滤波器的系统函数定义为

$$H_a(j\Omega)=\frac{V_o(j\Omega)}{E_S(j\Omega)} \tag{10-35}$$

对于有损网络，$|K(j\Omega)|^2<1$，无损网络可以达到 1，因而 $|K(j\Omega)|^2\leqslant 1$。

由于所讨论的电路是无源 LC 网络，因而系统总是稳定的，这样可以把 $K(j\Omega)$ 或 $H_a(j\Omega)$ 延拓为 $K(s)$ 或 $H_a(s)$。由式(10-34)可见，$K(s)$ 与 $H_a(s)$ 的零、极点分布规律相同，亦即这里定义的工作传输函数 $K(s)$ 将具有一般的网络函数性质。

由于工作传输函数 $K(j\Omega)$ 是频率的函数，反映了系统的频率特性，因而在频率特性阻带处将有极大的衰减，即大量的功率被反射回激励源，由此可以定义一个反射系数 $\rho(j\Omega)$

$$\begin{aligned}|\rho(j\Omega)|^2&=\frac{P_m-P_L}{P_m}=1-|K(j\Omega)|^2\\&=1-\frac{4R_S}{R_L}|H_a(j\Omega)|^2\end{aligned} \tag{10-36}$$

解析延拓后得到

$$\rho(s)\rho(-s)=1-\frac{4R_S}{R_L}H_a(s)H_a(-s) \tag{10-37}$$

此式给出了系统函数与反射系数之间的关系。取 $\rho(s)\rho(-s)$ 函数所有 s 左半平面极点即可构成 $\rho(s)$。

(2) 由反射系数 $\rho(s)$ 求一端口网络输入阻抗 $Z_{11}(s)$

为以下推导方便，将 $Z_{11}(j\Omega)$ 写成实部与虚部之和

$$Z_{11}(j\Omega)=R_{11}(j\Omega)+jX_{11}(j\Omega)$$

对于 LC 无损网络，输出端口消耗功率与输入端口消耗功率应当相等

$$\frac{1}{2}\frac{|V_o(j\Omega)|^2}{R_L}=\frac{1}{2}R_{11}(j\Omega)|I_1(j\Omega)|^2$$

由此导出

$$\frac{|V_o(j\Omega)|^2}{|I_1(j\Omega)|^2}=R_LR_{11}(j\Omega)$$

另有

$$\frac{|E_S(j\Omega)|^2}{|I_1(j\Omega)|^2}=|R_S+Z_{11}(j\Omega)|^2$$

由以上两式可以得到

$$\frac{|V_o(j\Omega)|^2}{|E_S(j\Omega)|^2}=\frac{R_LR_{11}(j\Omega)}{|R_S+Z_{11}(j\Omega)|^2}=|H(j\Omega)|^2 \tag{10-38}$$

将此结果代入式(10－36)有

$$|\rho(\mathrm{j}\Omega)|^2=1-\frac{4R_S}{R_L}\cdot\frac{R_L R_{11}(\mathrm{j}\Omega)}{|R_S+Z_{11}(\mathrm{j}\Omega)|^2}$$

$$=\frac{|R_S+R_{11}(\mathrm{j}\Omega)|^2+|X_{11}(\mathrm{j}\Omega)|^2-4R_S R_{11}(\mathrm{j}\Omega)}{|R_S+Z_{11}(\mathrm{j}\Omega)|^2}$$

$$=\frac{|R_S-R_{11}(\mathrm{j}\Omega)|^2+|X_{11}(\mathrm{j}\Omega)|^2}{|R_S+Z_{11}(\mathrm{j}\Omega)|^2}$$

$$=\frac{|Z_{11}(\mathrm{j}\Omega)-R_S|^2}{|Z_{11}(\mathrm{j}\Omega)+R_S|^2} \tag{10-39}$$

解析延拓后得到

$$\rho(s)\rho(-s)=\frac{Z_{11}(s)-R_S}{Z_{11}(s)+R_S}\cdot\frac{Z_{11}(-s)-R_S}{Z_{11}(-s)+R_S} \tag{10-40}$$

满足上式的 $\rho(s)$有两种可能，即

$$\rho(s)=\pm\left[\frac{Z_{11}(s)-R_S}{Z_{11}(s)+R_S}\right] \tag{10-41}$$

可以解出

$$Z_{11}(s)=R_S\left[\frac{1\pm\rho(s)}{1\mp\rho(s)}\right] \tag{10-42}$$

通过上面的推证，把转移函数 $H_a(s)$的实现问题转化为式(10－42)所示策动点阻抗函数 $Z_{11}(s)$的实现。由达林顿电路结构可以看出，$Z_{11}(s)$是无损 LC 滤波网络与负载电阻 R_L 共同组成的一端口输入阻抗，它满足一端口策动点阻抗函数的正实性，可以用一端口网络综合法实现它的具体电路。

例 10－7 给定由信号源到负载的系统函数为

$$H_a(s)=\frac{k}{s^2+3s+3}$$

若信源内阻 $R_S=1\ \Omega$，端接负载电阻 R_L 分别为：(1) $R_L=1\ \Omega$；(2) $R_L=2\Omega$。试用无损 LC 二端口网络实现此系统。

解 由给定的 $H_a(s)$，系统的传输零点位于 $s=\infty$处。在 $s=0$ 时有

$$H_a(0)=\frac{k}{3}=\frac{R_L}{R_S+R_L}$$

(1) 当 $R_L=1\ \Omega$，此时 $k=\frac{3}{2}$，代入式(10－37)

$$\rho(s)\rho(-s)=1-4\cdot\frac{\frac{3}{2}}{s^2+3s+3}\ \frac{\frac{3}{2}}{s^2-3s+3}$$

$$=\frac{s^4-3s^2}{(s^2+3s+3)(s^2-3s+3)}$$

$$=\frac{s(s+\sqrt{3})}{(s^2+3s+3)}\cdot\frac{-s(-s+\sqrt{3})}{(s^2-3s+3)}$$

从 $\rho(s)\rho(-s)$零、极点分布可以看出,为使所得结果满足最小相位函数的条件,选择式中第一项作为 $\rho(s)$,于是写出

$$\rho(s)=\frac{s(s+\sqrt{3})}{s^2+3s+3}$$

按式(10－42)可实现的策动点阻抗函数有两个:

$$Z_{11}(s)=\frac{1+\rho(s)}{1-\rho(s)}=\frac{2s^2+(3+\sqrt{3})s+3}{(3-\sqrt{3})s+3}$$

$$Z'_{11}(s)=\frac{1}{Z_{11}(s)}=\frac{1-\rho(s)}{1+\rho(s)}=\frac{(3-\sqrt{3})s+3}{2s^2+(3+\sqrt{3})s+3}$$

对 $Z_{11}(s)$和 $Z'_{11}(s)$分别用考尔 Ⅰ 型结构实现得

$$Z_{11}(s)=1.577s+\frac{1}{0.423s+1}$$

$$Z'_{11}(s)=\frac{1}{Z_{11}(s)}=\frac{1}{1.577s+\frac{1}{0.423s+1}}$$

实现的电路有两种可能,如图 10－16 所示。

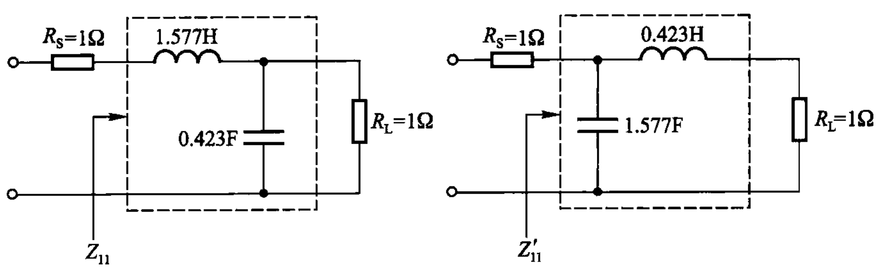


图 10－16　$R_L=1\ \Omega$时 $H_a(s)$的实现

(2) 当 $R_L=2$,此时 $k=2$,由式(10－40)得

$$\rho(s)\rho(-s)=1-\frac{4}{2}\left(\frac{2}{s^2+3s+3}\right)\cdot\left(\frac{2}{s^2-3s+3}\right)$$

$$=\frac{s^4-3s^2+1}{(s^2+3s+3)(s^2-3s+3)}$$

$$=\left(\frac{s^2+\sqrt{5}s+1}{s^2+3s+3}\right)\left(\frac{s^2-\sqrt{5}s+1}{s^2-3s+3}\right)$$

求得最小相位解

$$\rho(s)=\frac{s^2+\sqrt{5}s+1}{s^2+3s+3}$$

按式(10-42)得

$$Z_{11}(s)=\frac{1+\rho(s)}{1-\rho(s)}=\frac{2s^2+(3+\sqrt{5})s+4}{(3-\sqrt{5})s+2}$$

$$Z'_{11}(s)=\frac{1}{Z_{11}(s)}=\frac{(3-\sqrt{5})s+2}{2s^2+(3+\sqrt{5})s+4}$$

在这两种可能实现中，只有 $Z_{11}(s)$是满足要求的，而 $Z'_{11}(s)$不满足题给条件，因为当 $s=0$ 时，$Z_{11}(0)=2$，$Z'_{11}(0)=\frac{1}{2}$。

对 $Z_{11}(s)$用连分式展开

$$Z_{11}(s)=2.618s+\cfrac{1}{0.191s+\cfrac{1}{2}}$$

实现的电路如图 10-17 所示。

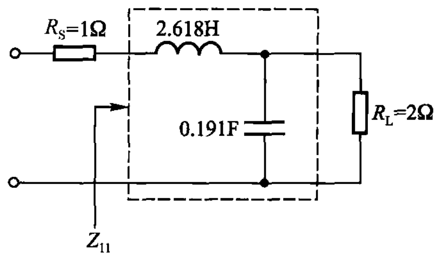


图 10-17 $R_L=2\ \Omega$ 时 $H_a(s)$的实现

可见，在利用这种方法综合时，若 R_L 值有某种特定要求，有可能只获得一个合理的 $Z_{11}(s)$值，不能同时实现两类电路结构。此外，若 $\rho(s)\rho(-s)$在 jΩ 轴上零点不为偶阶重零点时，则无法从中分离出 $\rho(s)$，因而也不能完成综合实现。

参照系统函数 $H_a(s)$一般表达式(10-29)，可以看出，在上述讨论中选择的实例相当于 $H_a(s)$分子多项式 $m=0$ 的情况，即分子只有常系数项。此时，$H_a(s)$全部零点位于 $s=\infty$处，因此称为“全极点滤波器”，且频响具有低通特性。一般情况下，滤波器设计理论中只着重研究低通的综合，很少直接讨论高通、带通、带阻滤波器的综合，而是借助“频率变换”与“元件变换”技术来实现低通以外各种滤波电路(见 10.5 节)。

(二) 巴特沃思与切比雪夫滤波器的电路实现

由于 N 阶巴特沃思滤波器分母多项式是霍尔维茨多项式，并且 $H_a(s)$全部传输零点在 $s=\infty$处，因而可以用图 10-15 所示达林顿电路结构实现。一般情况电路都是在匹配条件下工作，所以取信源内阻 R_S 和负载电阻 R_L 相等。此时满足

$$H_a(j0)=\frac{R_L}{R_S+R_L}=\frac{1}{2}$$

根据式(10-37)有

$$\rho(s')\rho(-s')=1-\frac{4R_S}{R_L}\cdot\frac{\frac{1}{2}}{B_N(s')}\cdot\frac{\frac{1}{2}}{B_N(-s')}$$
$$=\frac{B_N(s')B_N(-s')-1}{B_N(s')B_N(-s')}=\frac{(s')^N(-s')^N}{B_N(s')B_N(-s')} \tag{10-43}$$

式中，$B_N(s')$就是表 10－1 所列的巴特沃思多项式。这里我们看到一个有趣的现象，即多项式 $B_N(s')$与 $B_N(-s')$相乘等于$(s')^N(-s')^N+1$，于是得到上式简捷的结果。如有兴趣，读者可自行推证这一关系。

由式(10－43)可以选定归一化的反射系数

$$\rho(s')=\frac{(s')^N}{B_N(s')}$$

用达林顿电路实现时，策动点阻抗函数 $Z_{11}(s')$可表示为

$$Z_{11}(s')=R_S\frac{1\pm\rho(s')}{1\mp\rho(s')}=R_S\frac{B_N(s')\pm(s')^N}{B_N(s')\mp(s')^N} \tag{10-44}$$

上式表示具有巴特沃思滤波特性的电路有两种可能的综合形式

$$Z_{11}(s')=R_S\frac{B_N(s')+(s')^N}{B_N(s')-(s')^N} \tag{10-45}$$

和

$$Z'_{11}(s')=R_S\frac{B_N(s')-(s')^N}{B_N(s')+(s')^N} \tag{10-46}$$

下面以 $N=4$ 的巴特沃思滤波器为例给出具体的电路设计。

为简化计算，把策动点阻抗函数 $Z_{11}(s')$对信源内阻归一化，式(10－44)表示为

$$\frac{Z_{11}(s')}{R_S}=\frac{B_N(s')\pm(s')^N}{B_N(s')\mp(s')^N}$$

其中

$$B_N(s')=B_4(s')=(s')^4+2.6131(s')^3+3.4142(s')^2+2.6131s'+1$$

第一种实现：

$$\frac{Z_{11}(s')}{R_S}=\frac{B_4(s')+(s')^4}{B_4(s')-(s')^4}$$
$$=\frac{2(s')^4+2.6131(s')^3+3.4142(s')^2+2.6131s'+1}{2.6131(s')^3+3.4142(s')^2+2.6131s'+1}$$

展开成连分式表示

$$\frac{Z_{11}(s')}{R_S}=0.765\,4s'+\cfrac{1}{1.847\,8s'+\cfrac{1}{1.847\,8s'+\cfrac{1}{0.765\,4s'+1}}}$$

$$=L_1's'+\cfrac{1}{C_2's'+\cfrac{1}{L_3's'+\cfrac{1}{C_4's'+1}}}$$

其中 L_1',C_2',L_3',C_4' 为归一化电感、电容值，其实现电路如图 10－18 所示。此电路中的元件值都是对频率和内阻归一化的，称为“低通原型滤波器”。

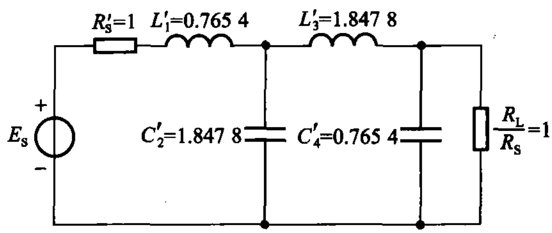


图 10－18　$N=4$ 阶巴特沃思低通原型滤波器实现(T 型实现)

第二种实现：

$$\frac{Z_{11}(s')}{R_S}=\frac{B_4(s')-(s')^4}{B_4(s')+(s')^4}$$

$$=\frac{2.613\,1(s')^3+3.414\,2(s')^2+2.613\,1s'+1}{2(s')^4+2.613\,1(s')^3+3.414\,2(s')^2+2.613\,1s'+1}$$

展开成连分式表示

$$\frac{Z_{11}(s')}{R_S}=\cfrac{1}{0.765\,4s'+\cfrac{1}{1.847\,8s'+\cfrac{1}{1.847\,8s'+\cfrac{1}{0.765\,4s'+1}}}}$$

$$=\cfrac{1}{C_1's'+\cfrac{1}{L_2's'+\cfrac{1}{C_3's'+\cfrac{1}{L_4's'+1}}}}$$

实现的电路如图 10－19 所示。

按照本例综合方法，工程上已经把不同 N 对应的归一化低通元件值做成如表 10－4 所示的表格(同时参看图 10－20)，以备设计时查索。

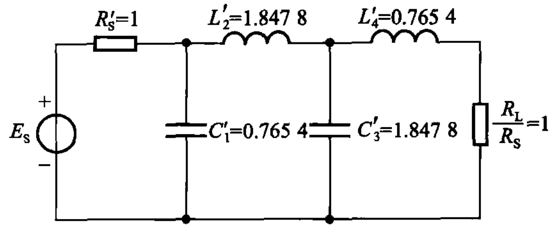


图 10－19　$N=4$ 阶巴特沃思低通原型滤波器实现(Π 型实现)

在实际实现电路时，需要把原型滤波器的元件值去归一化。以上述第一种电路实现为例，先对 R_S 去归一化

$$Z_{11}(s')=L_1'R_Ss'+\cfrac{1}{\cfrac{C_2'}{R_S}s'+\cfrac{1}{L_3'R_Ss'+\cfrac{1}{\cfrac{C_4'}{R_S}s'+\cfrac{1}{R_S}}}}$$

表 10－4　巴特沃思低通原型滤波器归一化元件值表

N	L_1'	C_2'	L_3'	C_4'	L_5'	C_6'	L_7'
1	2.000 0						
2	1.414 2	1.414 2					
3	1.000 0	2.000 0	1.000 0				
4	0.765 4	1.847 8	1.847 8	0.765 4			
5	0.618 0	1.618 0	2.000 0	1.618 0	0.618 0		
6	0.517 6	1.414 2	1.931 9	1.931 9	1.414 2	0.517 6	
7	0.445 0	1.247 0	1.801 9	2.000 0	1.801 9	1.247 0	0.445 0
N	C_1'	L_2'	C_3'	L_4'	C_5'	L_6'	C_7'

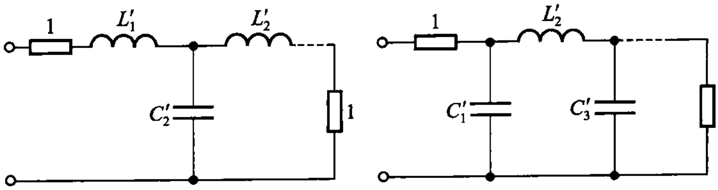
注：(1) 表中首行元件号对应电路图 10－20(a)，称为 T 型结构实现。

(2) 表中末行元件号对应电路图 10－20(b)，称为 Π 型结构实现。

再对频率去归一化，用 $s'=\frac{s}{\Omega_c}$代入上式得

$$Z_{11}(s)=\frac{L_1'R_S}{\Omega_c}s+\cfrac{1}{\cfrac{C_2'}{R_S\Omega_c}s+\cfrac{1}{\cfrac{L_3'R_S}{\Omega_c}s+\cfrac{1}{\cfrac{C_4'}{R_S\Omega_c}s+\cfrac{1}{R_S}}}}$$

去归一化实际电感、电容值可由下式求出



(a) T型实现　　　　(b) Π型实现

图 10－20　对应表 10－4 巴特沃思低通原型滤波器两种实现

$$\begin{cases} L = \dfrac{R_S}{\Omega_c} L' \\ C = \dfrac{1}{\Omega_c R_S} C' \end{cases} \tag{10-47}$$

例 10－8　求例 10－2 设计的巴特沃思滤波器的具体实现电路，设 $R_S = R_L = 600\ \Omega$。

解　例 10－2 已经求得滤波器阶数 $N=4$，且求得截止角频率 $\Omega_c = 2\pi \times 1.304 \times 10^4$ rad/s，由原型电路图 10－18 对各元件去归一化：

$$L_1 = \frac{R_S}{\Omega_c} L_1' = \frac{600}{2\pi \times 1.304 \times 10^4} \times 0.7654\ \text{H} = 5.61\ \text{mH}$$

$$C_2 = \frac{1}{\Omega_c R_S} C_2' = \frac{1}{2\pi \times 1.304 \times 10^4 \times 600} \times 1.8478\ \text{F} = 0.038\ \mu\text{F}$$

$$L_3 = \frac{R_S}{\Omega_c} L_3' = \frac{600}{2\pi \times 1.304 \times 10^4} \times 1.8478\ \text{H} = 13.53\ \text{mH}$$

$$C_4 = \frac{1}{\Omega_c R_S} C_4' = \frac{1}{2\pi \times 1.304 \times 10^4 \times 600} \times 0.7654\ \text{F} = 0.016\ \mu\text{F}$$

具体电路实现如图 10－21 所示。

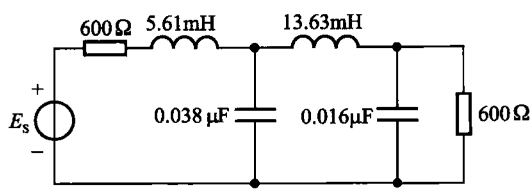


图 10－21　例 10－2 的具体实现电路

下面转来讨论切比雪夫滤波器电路实现的例子。我们将继续前文例 10－3

的设计工作。

例 10－9　求例 10－3 设计之切比雪夫滤波器的具体实现电路。给定 $R_S=R_L=600\ \Omega$。

解　这里的实现原理与巴特沃思滤波器相同，将归一化系统函数 $H_a(s')$ 代入式(10－37)求反射系数 $\rho(s')$ 与 $\rho(-s')$ 之乘积。按给定条件，在 $s=0$ 的低通情况下应有

$$H_a(0)=\frac{R_L}{R_L+R_S}=\frac{1}{2}$$

于是求得

$$\begin{aligned}\rho(s')\rho(-s')=1-\frac{4R_S}{R_L}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times 0.491\ 3^2\times\\ \{[(s')^3+0.988\ 3(s')^2+1.238\ 4s'+0.491\ 3]\times\\ [-(s')^3+0.988\ 3(s')^2-1.238\ 4s'+0.491\ 3]\}^{-1}\end{aligned}$$

$$\rho(s')=\frac{(s')^3+0.750\ 0s'}{(s')^3+0.988\ 3(s')^2+1.238\ 4s'+0.491\ 3}$$

策动点阻抗函数的两种可能实现为

$$\frac{Z_{11}(s')}{R_S}=\frac{1+\rho(s')}{1-\rho(s')}=\frac{2(s')^3+0.988\ 3(s')^2+1.988\ 4s'+0.491\ 3}{0.988\ 3(s')^2+0.488\ 4s'+0.491\ 3}$$

$$\frac{Z'_{11}(s')}{R_S}=\frac{1-\rho(s')}{1+\rho(s')}=\frac{0.988\ 3(s')^2+0.488\ 4s'+0.491\ 3}{2(s')^3+0.988\ 3(s')^2+1.988\ 4s'+0.491\ 3}$$

展开成连分式表示

$$\frac{Z_{11}(s')}{R_S}=2.023\ 6s'+\cfrac{1}{0.994\ 1s'+\cfrac{1}{2.023\ 6s'+1}}$$

$$\frac{Z'_{11}(s')}{R_S}=\cfrac{1}{2.023\ 6s'+\cfrac{1}{0.944\ 1s'+\cfrac{1}{2.023\ 6s'+1}}}$$

对 $R_S=600\ \Omega$ 和 $\Omega_c=2\pi\times10^4$ rad/s 去归一化得

$$\begin{aligned}Z_{11}(s)&=2.023\ 6R_S\left(\frac{s}{\Omega_c}\right)+\cfrac{1}{\cfrac{0.994\ 1}{R_S}\left(\cfrac{s}{\Omega_c}\right)+\cfrac{1}{2.023\ 6R_S\left(\cfrac{s}{\Omega_c}\right)+R_S}}\\ &=19.32\times10^{-3}s+\cfrac{1}{0.026\times10^{-6}s+\cfrac{1}{19.32\times10^{-3}s+600}}\end{aligned}$$

$$Z'_{11}(s)=\cfrac{1}{\cfrac{2.0236}{R_S}\left(\cfrac{s}{\Omega_c}\right)+\cfrac{1}{0.9941R_S\left(\cfrac{s}{\Omega_c}\right)+\cfrac{1}{\cfrac{2.0236}{R_S}\left(\cfrac{s}{\Omega_c}\right)+\cfrac{1}{R_S}}}}$$

$$=\cfrac{1}{0.054\times10^{-6}s+\cfrac{1}{9.49\times10^{-3}s+\cfrac{1}{0.054\times10^{-6}s+\cfrac{1}{600}}}}$$

实现的电路如图 10－22(a)和(b)所示。

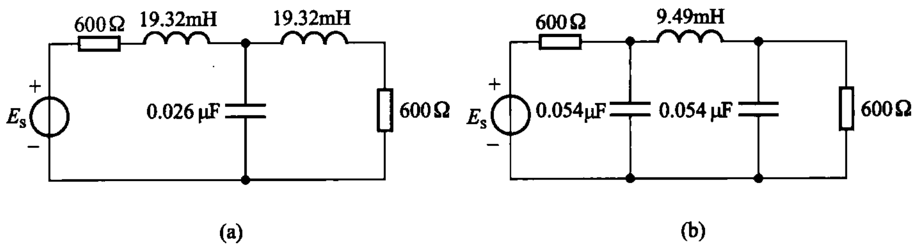


图 10－22 例 10－3 切比雪夫滤波器的两种实现

为设计方便对低通原型电路实现的元件值已制成如表 10－5 所示的表格(同时参看图 10－23),表中是不同阶次 N,在通带内起伏波纹为 1 dB 时两种实现的归一化元件值。当 N＝偶数时,在 $\Omega=0$ 系统函数值 $|H_a(j0)|$ 不等于 1,而是等于 $\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$,因而用达林顿电路结构实现时 R_L 与 R_S 值的选择条件将涉及

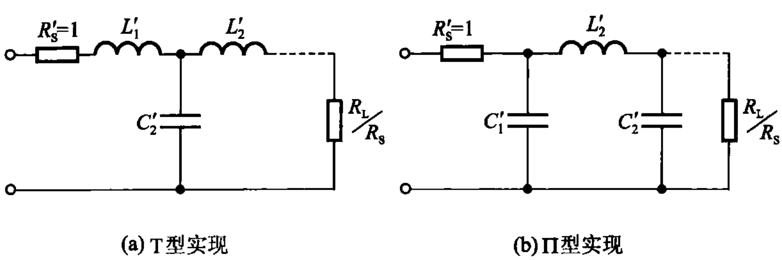


图 10－23 对应表 10－5 切比雪夫低通原型滤波器两种实现

更多因素，分析过程比较复杂，限于本书篇幅，不再讨论，如有需要可查看参考书①。在表 10－5 中 N＝奇数时，归一化负载电阻选为 $\frac{R_L}{R_S}=1$，而 N＝偶数时 $\frac{R_L}{R_S}=0.25$。

表 10－5 切比雪夫Ⅰ型低通原型滤波器归一化元件值(1dB 波纹)

N	R_L/R_S	L_1'	C_2'	L_3'	C_4'	L_5'	C_6'	L_7'
1	1.00	1.017 7						
2	0.25	3.777 9	0.300 1					
3	1.00	2.023 6	0.994 1	2.023 6				
4	0.25	4.569 9	0.542 8	5.368 0	0.340 6			
5	1.00	2.134 9	1.091 1	3.000 9	1.091 1	2.134 9		
6	0.25	4.736 6	0.571 6	6.024 0	0.576 4	5.535 3	0.348 6	
7	1.00	2.166 6	1.111 5	3.093 6	1.173 5	3.093 6	1.111 5	2.166 6
N	R_L/R_S	C_1'	L_2'	C_3'	L_4'	C_5'	L_6'	C_7'

注：(1) 表中首行元件号对应电路图 10－23(a)，并只适用于 N＝奇数情况。

(2) 表中末行元件号对应电路图 10－23(b)，对 N＝奇数和 N＝偶数均可实现。

10.5 模拟滤波器的频率变换与元件变换

在工程实际中，设计高通、带通、带阻滤波器的常用方法是借助对应的低通原型滤波器，经频率变换和元件变换得到，图 10－24 示意给出了设计流程。下面将依次说明图中各步骤工作原理。

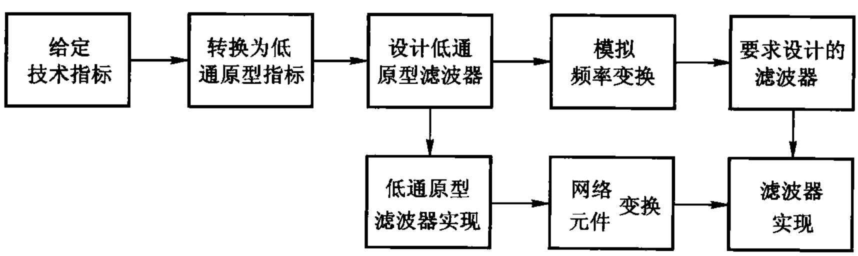


图 10－24 模拟滤波器设计流程图

① 例如参考书：Harry Y F, Lam 著. 模拟和数字滤波器设计与实现. 冯一云，应启珩等译. 北京：人民邮电出版社，1985。

(一) 低通到高通的变换

按图 10－24 流程，为寻求相应的低通原型，用高通滤波器截止角频率 Ω_c 对 $H_a(j\Omega)$ 进行归一化，得到归一化的高通系统函数 $H_a(j\lambda)$，如图 10－25 所示，归一化频率为 $\lambda=\frac{\Omega}{\Omega_c}=\frac{\Omega}{\Omega_r}$，这里的 Ω_r 为参考角频率，且选 $\Omega_r=\Omega_c$。因而在 λ 坐

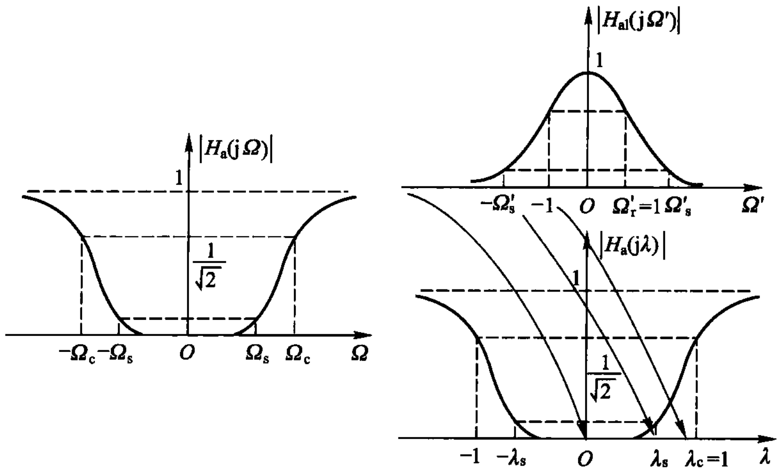


图 10－25 低通原型到高通的转换

标中，$\lambda_r=\frac{\Omega_r}{\Omega_r}=1$，即截止角频率 $\lambda_c=\lambda_r=1$。从图 10－25 可以看出低通到高通的转换，对应频率特性呈现倒数关系，因而取

$$\frac{s}{\Omega_r}=\frac{1}{s'} \tag{10-48}$$

当 s 为虚数时（$s=j\Omega$），s' 也为虚数（$s'=j\Omega'$），即实频率仍变换为实频率，满足：$j\lambda=\frac{1}{j\Omega'}$，所以高通归一化频率 λ 与归一化低通频率 Ω' 的关系为

$$\lambda\cdot\Omega'=-1 \tag{10-49}$$

表 10－6 列出了这一对应关系。

表 10－6 高通— 低通归一化频率关系

归一化低通原型 Ω'	归一化高通频率 λ
0	$\pm\infty$
$\Omega'_r=1$	$\lambda_r=-1$
Ω'_s	$-\frac{1}{\lambda_s}$
$\pm\infty$	0
$\pm\Omega'$	$\mp\frac{1}{\lambda}$

按式(10-49)就可以把高通滤波器技术指标转换为相应的低通原型滤波器技术指标。设计低通原型滤波器得到系统函数 $H_{al}(s')$，按式(10-48)即可求得要求设计的高通滤波器系统函数 $H_a(s)=H_{al}\left(\frac{\Omega_r}{s}\right)$。至此已完成了图 10-24 上面一排的流程设计，到达右上角的框图。可由此 $H_a(s)$ 按 10.3 节的方法实现高通滤波器，然而这种方法并不方便。工程实际中往往按图 10-24 下面的流程实现电路，借助低通原型电路经元件变换得到高通滤波器。此方法简便易行。下面给出这种方法的变换公式。

对于电感：低通原型中的感抗 $L's'$ 经式(10-48)变换后得到

$$L's'=L'\left(\frac{\Omega_r}{s}\right)=\frac{1}{\frac{1}{L'\Omega_r}s} \tag{10-50}$$

可见，原电感变换为电容，对应的电容值为

$$C=\frac{1}{L'\Omega_r} \tag{10-51}$$

同理对于电容有

$$\frac{1}{C's'}=\frac{1}{C'\Omega_r}\cdot s \tag{10-52}$$

即原电容变换为电感，对应的电感值

$$L=\frac{1}{C'\Omega_r} \tag{10-53}$$

通过式(10-51)和式(10-53)对低通原型电路中元件作相应变换即可实现要求的高通滤波器。

例 10-10　给定高通滤波器的技术指标(参看图 10-26)

通带内起伏：-1 dB，　　$2\pi\times1.5\times10^4$ rad/s $\leqslant\Omega<\infty$

阻带衰减：$\leqslant$ -15 dB，　　$0\leqslant\Omega\leqslant2\pi\times10^4$ rad/s

用巴特沃思滤波形式实现，求该滤波器的 $H_a(s)$ 及其电路实现(设 $R_S=R_L=600\ \Omega$)。

解　(1) 求高通滤波器的归一化各频率

取参考频率 Ω_r 为 3 dB 处的截止角频率 Ω_c，但技术指标中没有给出，因而作为未知参数待定，求得归一化各频率

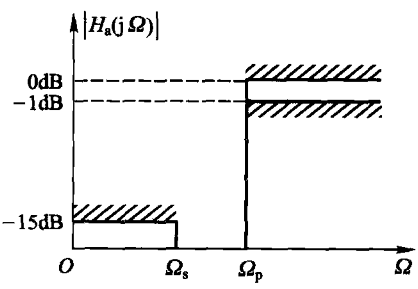


图 10-26　例 10-10 要求设计高通滤波特性

$$\begin{cases}\lambda_p=\dfrac{\Omega_p}{\Omega_c}=\dfrac{1}{\Omega_c}(2\pi\times1.5\times10^4)\\ \lambda_s=\dfrac{\Omega_s}{\Omega_c}=\dfrac{1}{\Omega_c}(2\pi\times10^4)\\ \lambda_r=\lambda_c=\dfrac{\Omega_c}{\Omega_c}=1\end{cases}$$

(2) 求低通原型滤波器频率及对应指标

$$\begin{cases}\Omega'_p=-\dfrac{1}{\lambda_p}=-\dfrac{\Omega_c}{2\pi\times1.5\times10^4}\\ \Omega'_s=-\dfrac{1}{\lambda_s}=-\dfrac{\Omega_c}{2\pi\times10^4}\\ \Omega'_c=1\end{cases}$$

因而有

$$|H_{al}(j\Omega'_p)|=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\Omega_c}{2\pi\times1.5\times10^4}\right)^{2N}}}=10^{-\frac{1}{20}}$$

$$|H_{al}(j\Omega'_s)|=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\Omega_c}{2\pi\times10^4}\right)^{2N}}}=10^{-\frac{15}{20}}$$

(3) 求低通原型系统函数 $H_{al}(s')$

确定滤波器阶数 N,由(2) 得

$$N=\frac{\lg\left(\dfrac{10^{1.5}-1}{10^{0.1}-1}\right)}{2\times\lg\left(\dfrac{2\pi\times1.5\times10^4}{2\pi\times10^4}\right)}=5.888$$

取 $N=6$、查表 10-1 可得 $H_{al}(s')$表达式如下:

$$H_{al}(s')=\frac{1}{(s')^6+3.863\,7(s')^5+7.464\,1(s')^4+9.141\,6(s')^3+7.464\,1(s')^2+3.863\,7s'+1}$$

(4) 求低通原型的电路实现

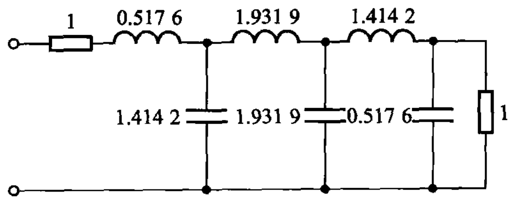
根据给定的 $H_{al}(s')$由表 10-2 的原型电路元件实现 T 型结构电路如图 10-27(a)所示。

(5) 求高通滤波器的 $H_a(s)$

通过低通原型来确定参考频率 $\Omega_r=\Omega_c$,利用阻带频率 Ω'_s 有

$$|H_{al}(j\Omega'_s)|=\frac{1}{\sqrt{1+(\Omega'_s)^{2\times6}}}=10^{-\frac{15}{20}}$$

$$\Omega'_s=\sqrt[12]{10^{1.5}-1}=1.33$$



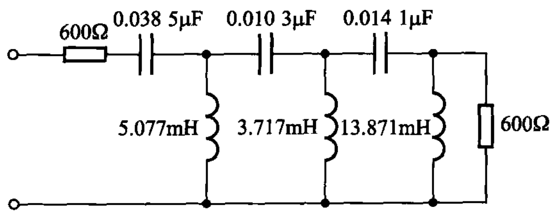


图 10－27　例 10－10 高通滤波器实现

求得

$$\Omega_r=\Omega_c=\Omega_s\cdot\Omega_s'=2\pi\times1.33\times10^4\ \text{rad/s}$$

用 $s'=\dfrac{\Omega_c}{s}=\dfrac{2\pi\times1.33\times10^4}{s}$代入 $H_{a1}(s')$式中得

$$H_a(s)=\frac{s^6}{s^6+3.23\times10^5s^5+5.21\times10^{10}s^4+5.33\times10^{15}s^3+3.64\times10^{20}s^2+1.57\times10^{25}s+3.41\times10^{29}}$$

(6) 高通滤波器电路实现

根据式(10－51)和式(10－53)，并同时考虑到对 R_S 去归一化，求出所需高通电路的元件值

$$C_1=\frac{1}{R_SL_1'\Omega_c}=\frac{1}{600\times0.517\,6\times2\pi\times1.33\times10^4}\ \text{F}=0.038\,5\ \mu\text{F}$$

$$L_2=\frac{R_S}{C_2'\Omega_c}=\frac{600}{1.414\,2\times2\pi\times1.33\times10^4}\ \text{H}=5.077\,0\ \text{mH}$$

$$C_3=\frac{1}{R_SL_3'\Omega_c}=\frac{1}{600\times1.931\,9\times2\pi\times1.33\times10^4}\ \text{F}=0.010\,3\ \mu\text{F}$$

$$L_4=\frac{R_S}{C_4'\Omega_c}=\frac{600}{1.931\,9\times2\pi\times1.33\times10^4}\ \text{H}=3.716\,5\ \text{mH}$$

$$C_5=\frac{1}{R_SL_5'\Omega_c}=\frac{1}{600\times1.414\,2\times2\pi\times1.33\times10^4}\ \text{F}=0.014\,1\ \mu\text{F}$$

$$L_6=\frac{R_S}{C_6'\Omega_c}=\frac{600}{0.5176\times2\pi\times1.33\times10^4}\text{ H}=13.8716\text{ mH}$$

电路如图 10－27(b)所示。

(二) 低通到带通的变换

和低通到高通的变换类似，先把带通滤波器频率取归一化，参考频率一般取带通滤波器的频带宽度，如图 10－28 所示，$\Omega_r=\Omega_{p2}-\Omega_{p1}$，归一化后的带通滤波器系统函数为$H_a(j\lambda)$。图 10－29 画出了低通原型与归一化带通滤波特性间的对应关系，表 10－7 列出了两者映射要求。满足此映射关系的 Ω'和 λ 之间满足

$$\Omega'=\frac{\lambda^2-\lambda_0^2}{\lambda} \tag{10-54}$$

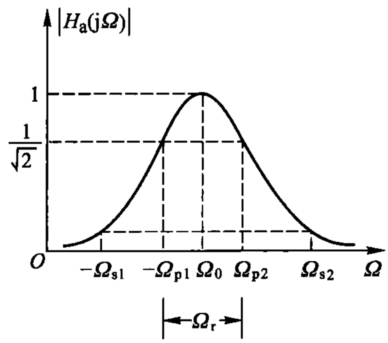


图 10－28 带通滤波特性

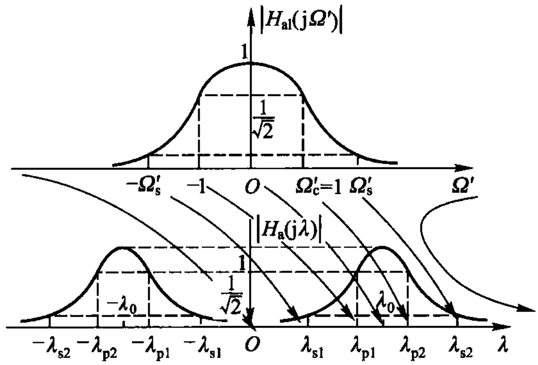


图 10－29 低通原型与归一化带通特性对应关系

表 10－7 低通原型 Ω'与归一化带通频率 λ 关系

低通原型频率 Ω'	归一化带通频率 λ
0	$\pm\lambda_0$
$\Omega'_c=1$	λ_{p2}
$\Omega'_c=-1$	λ_{p1}
Ω'_s	λ_{s2}
$-\Omega'_s$	λ_{s1}
∞	$\pm\infty$
$-\infty$	0

图 10－30 画出了此变换特性曲线。

由式(10－54)可求出带通滤波器的中心频率 λ_0

$$\begin{cases} \Omega'_c = \dfrac{\lambda_{p2}^2 - \lambda_0^2}{\lambda_{p2}} = 1 \\ -\Omega'_c = \dfrac{\lambda_{p1}^2 - \lambda_0^2}{\lambda_{p1}} = -1 \end{cases}$$

两式相加求得

$$\lambda_0 = \sqrt{\lambda_{p1}\lambda_{p2}} \tag{10-55}$$

这表明实际带通滤波器的中心频率是 Ω_{p1} 和 Ω_{p2} 的几何平均值

$$\Omega_0 = \sqrt{\Omega_{p1}\Omega_{p2}} \tag{10-56}$$

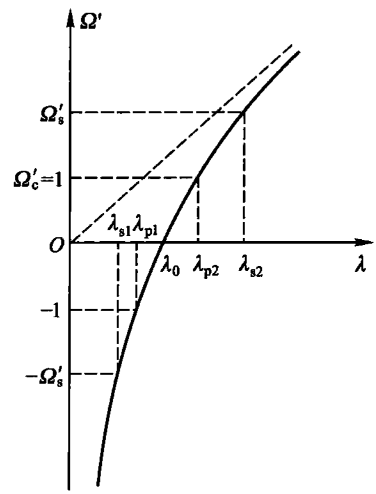


图 10－30　带通 Ω'与 λ 变换特性

式(10－54)用来求低通原型的指标，从而得出相应的低通原型系统函数 $H_{al}(s')$。利用式(10－54)也可求出复频率 s 和 s'之间的关系

$$H_{al}(j\Omega') = H_{al}\left(j\frac{\lambda^2 - \lambda_0^2}{\lambda}\right) = H_{al}\left[\frac{(j\lambda)^2 + \lambda_0^2}{j\lambda}\right]$$

因而有

$$s' = \frac{\left(\dfrac{s}{\Omega_r}\right)^2 + \left(\dfrac{\Omega_0}{\Omega_r}\right)^2}{\left(\dfrac{s}{\Omega_r}\right)} = \frac{s^2 + \Omega_0^2}{s(\Omega_{p2} - \Omega_{p1})} \tag{10-57}$$

利用式(10－54)和式(10－57)就可以通过低通原型设计出要求的带通滤波器。

带通滤波器的电路实现同样可借助低通原型电路经元件变换来实现。对低通原型电路中的电感 L'，由式(10－57)得

$$\begin{aligned} L's' &= L'\left[\frac{s^2 + \Omega_0^2}{s(\Omega_{p2} - \Omega_{p1})}\right] = L'\left(\frac{1}{\Omega_r}s + \frac{\Omega_0^2}{\Omega_r s}\right) \\ &= \left(\frac{L'}{\Omega_r}\right)s + \frac{1}{\left(\dfrac{\Omega_r}{L'\Omega_0^2}\right)s} = Ls + \frac{1}{Cs} \end{aligned} \tag{10-58}$$

即低通原型中的电感转换成电感 L 和电容 C 的串联，其中电感和电容值分别为

$$\begin{cases} L = \dfrac{L'}{\Omega_r} \\ C = \dfrac{\Omega_r}{\Omega_0^2 L'} \end{cases} \tag{10-59}$$

对电容 C'

$$C's' = C'\left(\frac{s^2+\Omega_0^2}{s\Omega_r}\right) = \frac{C'}{\Omega_r}s + \frac{1}{\left(\frac{\Omega_r}{C'\Omega_0^2}\right)s}$$

$$= Cs + \frac{1}{Ls} \tag{10-60}$$

即低通原型中的电容转换成电容 C 和电感 L 的并联,其中电容和电感值分别为

$$\begin{cases} C = \dfrac{C'}{\Omega_r} \\ L = \dfrac{\Omega_r}{\Omega_0^2 C'} \end{cases} \tag{10-61}$$

上述转换中,无论是 L' 转换成式(10-59)的 LC 串联,或是 C' 转换成式(10-61)的 LC 并联,L,C 元件间都满足

$$\Omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{10-62}$$

即 LC 串联或并联电路总是谐振在带通滤波器的中心频率 Ω_0。

例 10-11 给定带通滤波器技术指标(参看图 10-31)

$\Omega_{p1} = 2\pi \times 1.5 \times 10^4$ rad/s

$\Omega_{p2} = 2\pi \times 2.5 \times 10^4$ rad/s

$\Omega_{s1} = 2\pi \times 10^4$ rad/s

$\Omega_{s2} = 2\pi \times 3 \times 10^4$ rad/s

允许通带起伏:-3 dB

阻带衰减:≤-15 dB

用巴特沃思滤波器实现,并设信源内阻 R_S 和负载电阻 R_L 相等,$R_S = R_L = 600\ \Omega$,求滤波器的系统函数 $H_a(s)$ 及其电路实现。

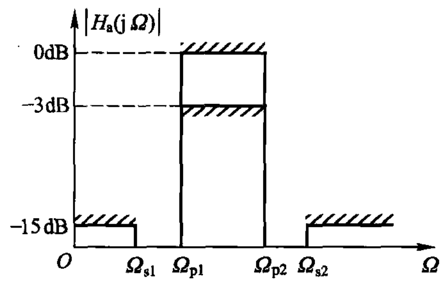


图 10-31 例 10-11 要求设计带通滤波特性

解 (1) 求归一化带通滤波器频率

取通带宽度为参考频率:$\Omega_r = \Omega_{p2} - \Omega_{p1} = 2\pi \times 10^4$ rad/s

$$\lambda_{p1} = \frac{\Omega_{p1}}{\Omega_r} = 1.5$$

$$\lambda_{p2} = \frac{\Omega_{p2}}{\Omega_r} = 2.5$$

$$\lambda_{s1} = 1$$

$$\lambda_{s2} = 3$$

$$\lambda_0 = \sqrt{\lambda_{p1}\lambda_{p2}} = 1.936\ 5$$

(2) 求低通原型各归一化频率

$$\Omega'_{p1}=\frac{\lambda_{p1}^2-\lambda_0^2}{\lambda_{p1}}=\frac{1.5^2-(1.936\ 5)^2}{1.5}=-1$$

$$\Omega'_{p2}=\frac{\lambda_{p2}^2-\lambda_0^2}{\lambda_{p2}}=\frac{2.5^2-(1.936\ 5)^2}{2.5}=1$$

$$\Omega'_{s1}=\frac{\lambda_{s1}^2-\lambda_0^2}{\lambda_{s1}}=\frac{1-(1.936\ 5)^2}{1}=-2.75$$

$$\Omega'_{s2}=\frac{\lambda_{s2}^2-\lambda_0^2}{\lambda_{s2}}=\frac{3^2-(1.936\ 5)^2}{3}=1.75$$

变换后低通原型的阻带两边不对称,这是由于式(10-54)是非线性变换,随着带通滤波器的相对带宽增加,即$\frac{\Omega_r}{\Omega_0}=\frac{1}{\lambda_0}$数值增加,其不对称性越严重。

(3) 求低通原型系统函数 $H_{al}(s')$

所需滤波器的阶数:由于$|\Omega'_{s1}|$不等于$|\Omega'_{s2}|$,为保证指标要求,取两者中较小的数值,即 $\Omega'_{s2}=1.75$,则

$$|H_{al}(j\Omega'_{s2})|=\frac{1}{\sqrt{1+(1.75)^{2N}}}=10^{-\frac{15}{20}}$$

$$N=\frac{\lg(10^{1.5}-1)}{2\lg(1.75)}=3.06$$

取 $N=4$,查表 10-1 得到

$$H_{al}(s')=\frac{1}{(s')^4+2.613\ 1(s')^3+3.414\ 2(s')^2+2.613\ 1s'+1}$$

(4) 求低通原型电路实现

对于 $N=4$ 已经求得原型电路 T 型结构实现如图 10-15 所示。

(5) 求带通滤波器的 $H_a(s)$

把 s'与 s 复频率关系式(10-57)代入 $H_{al}(s')$,并整理得

$$\begin{aligned}H_a(s)=&1.558\times10^{19}s^4(s^8+1.642\times10^5s^7+7.272\times10^{10}s^6+\\&7.943\times10^{15}s^5+1.731\times10^{21}s^4+1.176\times10^{26}s^3+\\&1.595\times10^{31}s^2+5.334\times10^{35}s+4.812\times10^{40})^{-1}\end{aligned}$$

(6) 带通滤波器的电路实现

利用原型到带通的元件变换公式,对图 10-15 所示的低通原型电路进行变换,得到带通电路如图 10-32 所示。元件值如下:

$$L_1=\frac{600}{2\pi\times10^4}\times0.765\ 4\ \text{H}=7.31\ \text{mH}$$

$$C_1=\frac{2\pi\times10^4}{(2\pi\times1.936\ 5\times10^4)^2\times0.765\ 4\times600}\ \text{F}=0.009\ \mu\text{F}$$

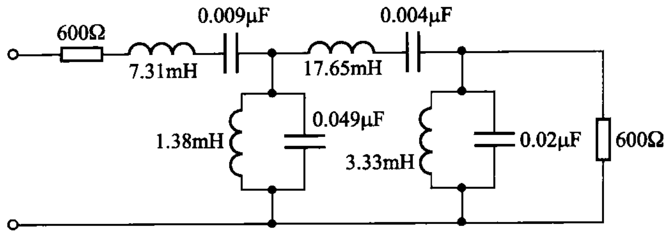


图 10-32 带通滤波器电路实现

$$L_2=\frac{2\pi\times10^4\times600}{(2\pi\times1.936\ 5\times10^4)^2\times1.847\ 8}\ \mathrm{H}=1.38\ \mathrm{mH}$$

$$C_2=\frac{1.847\ 8}{2\pi\times10^4\times600}\ \mathrm{F}=0.049\ \mu\mathrm{F}$$

$$L_3=\frac{600}{2\pi\times10^4}\times1.847\ 8\ \mathrm{H}=17.65\ \mathrm{mH}$$

$$C_3=\frac{2\pi\times10^4}{(2\pi\times1.936\ 5\times10^4)^2\times1.847\ 8\times600}\ \mathrm{F}=0.004\ \mu\mathrm{F}$$

$$L_4=\frac{2\pi\times10^4\times600}{(2\pi\times1.936\ 5\times10^4)^2\times0.765\ 4}\ \mathrm{H}=3.33\ \mathrm{mH}$$

$$C_4=\frac{0.765\ 4}{2\pi\times10^4\times600}\ \mathrm{F}=0.02\ \mu\mathrm{F}$$

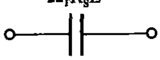
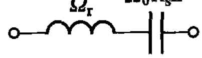
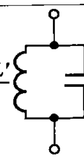
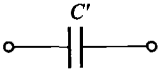
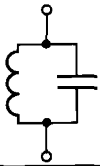
仿照上面讨论的原理还可导出利用低通原型设计带阻滤波器的计算公式，限于本书篇幅，略去推证和举例，只在下面给出结论。

表 10-8 示出低通原型与其他类型滤波器的频率变换和元件变换关系式，可供设计者查阅。

表 10-8 低通原型与其他类型滤波器频率与元件变换表

	低通原型	高通	带通	带阻
频率变换	Ω'	$\Omega'=-\frac{\Omega_r}{\Omega}$	$\Omega'=\frac{\left(\frac{\Omega}{\Omega_r}\right)^2-\left(\frac{\Omega_0}{\Omega_r}\right)^2}{\frac{\Omega}{\Omega_r}}$	$\Omega'=\frac{\frac{\Omega}{\Omega_r}}{\left(\frac{\Omega_0}{\Omega_r}\right)^2-\left(\frac{\Omega}{\Omega_r}\right)^2}$
复频率变换	s'	$s'=\frac{\Omega_r}{s}$	$s'=\frac{s^2+\Omega_0^2}{s\Omega_r}$	$s'=\frac{s\Omega_r}{s^2+\Omega_0^2}$

续表

	低通原型	高通	带通	带 阻
元件变换	 L'	 $\frac{1}{\Omega_T R_S L'}$	 $\frac{R_S L'}{\Omega_T}$ $\frac{\Omega_T}{\Omega_0^2 R_S L'}$	 $\frac{\Omega_T R_S L'}{\Omega_0^2}$ $\frac{1}{\Omega_T R_S L'}$
	 C'	 $\frac{R_S}{C'\Omega_T}$	 $\frac{\Omega_T R_S}{\Omega_0^2 C'}$ $\frac{C'}{\Omega_T R_S}$	 $\frac{R_S}{\Omega_T C'}$ $\frac{\Omega_T C'}{\Omega_0^2 R_S}$

这两节讲述的滤波器设计方法在通信与电子系统中得到广泛应用。然而，有时会遇到以下实际问题需要解决：一是电路结构上的悬空结点与地之间存在分布电容；二是电感元件可能较多；三是同类元件最大与最小值之比可能太大（元件值分布过宽），特别是对于相对带宽较窄的带通或带阻滤波器此问题较严重（习题 10－14）。为解决这些工程实际问题，有时，还需要在完成以上设计之后对网络整体结构进行等效变换。限于本书范围，不再讨论。

以上讨论的各种滤波器设计方法都具有一定的数字计算工作量，显然，用人工计算相当麻烦。近年来，各种应用软件的开发为简化滤波器设计带来很大方便。在实际工作中，用户可借助计算机完成繁琐的数据检索（查表）和数值计算。

10.6 无限冲激响应(IIR)数字滤波器

本节和下节将要研究数字滤波器的基本原理和简要设计方法。与模拟滤波器相对应，在离散信号系统中广泛地应用“数字滤波器”。“数字滤波器”的作用是利用离散时间系统的特性对输入信号波形或频谱进行加工处理，或者说利用数字的方法按预定要求对信号进行变换，把输入信号变成一定的输出信号，从而达到改变信号频谱的目的。因此，从广义上讲，数字滤波是具有某种“算法”的数字处理过程。

在本书前文中（第八章和本章开始）曾多次介绍数字滤波器的初步概念。图 8－17 给出了数字滤波器理想化滤波特性的一般图形，从例 8－22 到例 8－24 研究了它们的一些基本原理。8.11 节的第（二）部分介绍了一种实际应用的低通滤波器原理，并与模拟滤波器进行了对比。

图 10－2 给出利用数字滤波器对模拟信号处理的一般框图。现将该图细

通滤波器原理，并与模拟滤波器进行了对比。

图 10－2 给出利用数字滤波器对模拟信号处理的一般框图。现将该图细化、示意给出波形并分析其频谱结构之变化。在图 10－33(a)的中央部位画出了数字滤波器的方框，我们可以利用前面讨论的离散时间系统频率响应(第八章 8.10 节)对输入信号 $x(n)$滤波，此滤波器的系统函数为 $H(z)$，经 $H(z)$作用之后得到输出信号 $y(n)$。实际上，$x(n)$往往还要转换成二进制的数字信号，经滤波后先得到二进制的输出信号，再转换成序列 $y(n)$。或者说实现 $H(z)$的核心部件(包括移位、乘系数、相加减)都是按二进制完成的。

如果输入为连续信号 $x(t)$(例如语音信号)，希望输出也为连续信号 $y(t)$时，在滤波器两端还要分别接入"抽样"和"模拟低通滤波"两功能部件。以上过程及各部分功能和波形变化示意如图 10－33(b)所示。

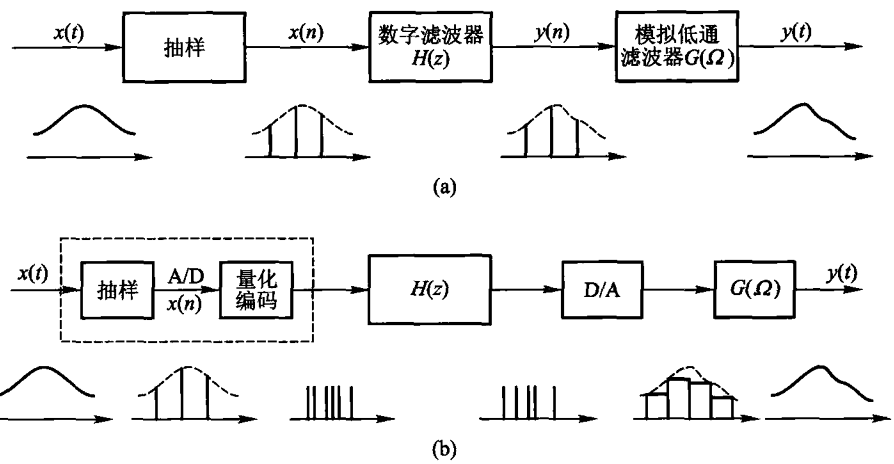


图 10－33 数字滤波器原理

可以认为，数字滤波器是一种对输入信号进行离散时间处理的系统。输入信号可以是连续信号、抽样序列或数字信号。数字滤波器以其不同的结构分别适应上述三种情况的要求。可以借助通用数字计算机按照人们编制的程序实现数字滤波，也可以利用专门器件或专用的微处理机实现所需滤波功能。

若输入的连续信号 $x(t)$是带宽受限的，其频谱限在 $\pm\Omega_m$ 之内。令 $X(\Omega)=\mathscr{F}[x(t)]$，如果在满足抽样定理的条件下对 $x(t)$进行抽样，已知

$$\mathscr{F}[x(t)\delta_T(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta_T(t)e^{-j\Omega t}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)e^{-j\Omega t}dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\Omega T}$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\Omega - k\Omega_s)$$

$$\mathscr{F}[x(nT)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\Omega T}$$

这里，按照本章开始(10.1 节)约定的习惯，对连续信号的角频率以 Ω 表示，而离散时间信号以 ω 表示，实际上二者是一回事($\Omega T=\omega$，当 $T=1$ 时 Ω 即为 ω)。$x(n)$的频谱写作

$$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_s)$$

其中抽样率

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T} \geqslant 2\omega_m$$

此时数字滤波器输出 $y(n)$的频谱为

$$Y(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) \cdot X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$$

式中 $H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = H(z)\big|_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}}$是数字滤波器的频率响应。显然，$x(n)$的频谱经过 $H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$的滤波而得到了 $y(n)$的频谱 $Y(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$，如图 10－34 所示。

注意到图中 $X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$的频谱结构是 $X(\Omega)$以 Ω_s 为周期进行重复，由于 $\Omega_s \geqslant 2\Omega_m$，因而在重复过程中不会产生混叠。

若模拟低通滤波器的系统函数为 $G(\Omega)$，且为理想低通，即

$$G(\Omega) = \begin{cases} 1 & (\text{当} |\Omega| \leqslant \Omega_c) \\ 0 & (\text{当} |\Omega| > \Omega_c) \end{cases}$$

则输出信号 $y(t)$的频谱 $Y(\Omega)$相当于只取出 $Y(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$围绕零点出现的图形，也即恢复为连续时间信号 $Y(\Omega)$，如图 10－34 最下端图形所示。这表明数字滤波器的频率响应 $H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$起着对输入连续信号 $x(t)$的频谱进行滤波的作用。上述全部过程如图 10－34 所示。

利用硬件或软件都能实现数字滤波器的功能。如果利用软件，则需要编出计算机程序，由数字计算机或微处理机去完成滤波器功能；如果利用硬件，则滤波器由数字部件连接而成。

数字滤波器的结构和设计方法有多种类型。如果按照系统冲激响应 $h(n)$之特征来划分，可以有以下两大类型：

(1) 无限冲激响应型(Infinite impulse response, IIR)，它的冲激响应 $h(n)$无限延长。第八章 8.10 节中介绍的例 8－22 到例 8－24 构成的滤波器都属此种类型。

(2) 有限冲激响应型(finite impulse response, FIR)，它的冲激响应 $h(n)$可

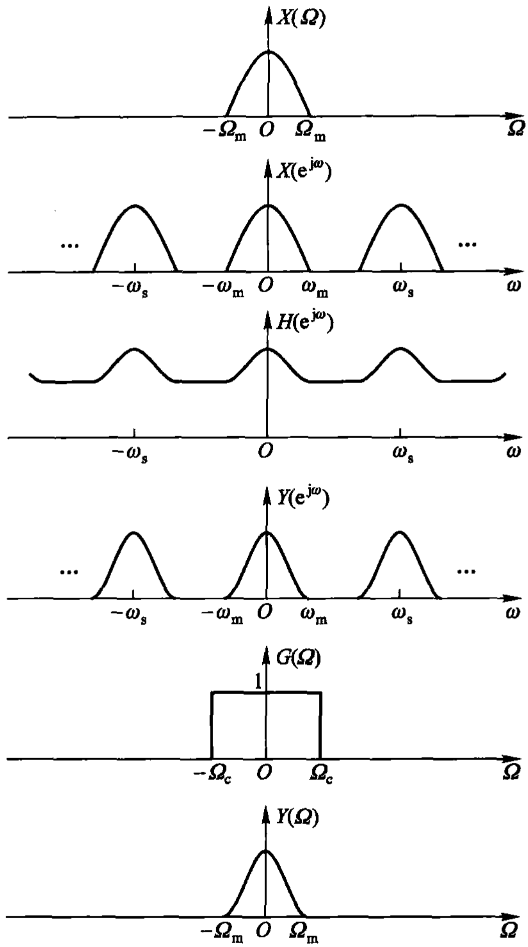


图 10－34 数字滤波器信号频谱

在有限长时间内结束。第八章习题 8－34，即题图 8－34 的结构即属此种类型。

线性时不变离散系统的系统函数 $H(z)$是 z^{-1}的有理函数，即

$$H(z)=\frac{\sum_{r=0}^{M}b_r z^{-r}}{1+\sum_{k=1}^{N}a_k z^{-k}} \tag{10-63}$$

根据 $H(z)$表达式中系数的特征即可对上述两类数字滤波器进行区分。若式(10－63)中系数 $a_k\neq0$，则构成 IIR 滤波器，与此相反，当 $a_k=0$ 时，则对应 FIR 滤波器。

与模拟滤波器的情况类似，数字滤波器的设计过程也是先给出频响特性的容差图（类似于图 10-3），然后选定 $H(z)$ 函数，也即先解决逼近问题，再研究滤波器电路结构的实现。

必须注意，与模拟滤波特性的不同之处在于频响曲线将以 2π 为周期重复出现（此处 2π 即图 8-17 中的 ω_s，一般选 $T=1$ 所以 $\omega_s=2\pi$）。

本节先讨论 IIR 滤波器，下节研究 FIR 滤波器。IIR 滤波器的构成方法需借助模拟滤波器已经成熟的技术和数据。对此，在 8.11 节的（二）已有初步认识。这种滤波器的设计流程示意于图 10-35。可以看出，这一过程的要害是要完成 s 域与 z 域之间的映射转换。为使数字滤波器保持模拟滤波器的特性，这种映射关系应满足下列条件：

（1）为使模拟滤波器的频率特性 $H_a(j\Omega)$ 和数字滤波器的频率特性 $H(e^{j\omega})$ 有相互对应关系，要求 s 域的虚轴 $j\Omega(-\infty<\Omega<\infty)$ 映射为 z 平面的单位圆 $z=e^{j\omega}(-\pi\leqslant\omega\leqslant\pi)$。

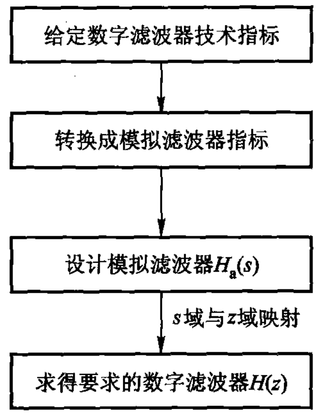


图 10-35 IIR 滤波器设计流程图

（2）s 域左半平面（$\mathrm{Re}[s]<0$）映射到 z 平面的单位圆内部（$|z|<1$），也就是稳定的模拟滤波器经映射后是稳定的数字滤波器。

下面分别介绍两种 IIR 滤波器的构成原理和简要的设计方法。

（一）冲激响应不变法（简称冲激不变法）

这种变换方法是把模拟滤波器的冲激响应 $h_a(t)$ 进行等间隔抽样，其抽样值 $h_a(nT)$ 作为数字滤波器的单位样值响应 $h(n)$，即

$$h(n)=h_a(nT)=h_a(t)\big|_{t=nT} \tag{10-64}$$

其中 T 为抽样间隔［还需注意，若 $h_a(t)$ 在零点有跳变，则 $h(n)$ 在 $n=0$ 点取此跳变值］。对 $h(n)$ 取 z 变换求得 $H(z)=\mathscr{Z}[h(n)]$ 作为该滤波器的系统函数。

设模拟滤波器的系统函数具有单极点，表达式为

$$H_a(s)=\frac{\sum_{r=0}^{M} d_r s^r}{1+\sum_{k=1}^{N} c_k s^k}=\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{s-s_k} \tag{10-65}$$

式中

$$A_k=(s-s_k)H_a(s)\big|_{s=s_k} \tag{10-66}$$

对式（10-65）取逆变换

$$h_a(t)=\sum_{k=1}^{N}A_k e^{s_k t}u(t) \tag{10-67}$$

按式(10-64)的规定，对 $h_a(t)$ 抽样并取 z 变换

$$h(n)=h_a(t)\Big|_{t=nT}=\sum_{k=1}^{N}A_k e^{s_k nT}u(n) \tag{10-68}$$

$$H(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=1}^{N}A_k e^{s_k nT}\Big)z^{-n}=\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{1-e^{s_k T}z^{-1}} \tag{10-69}$$

对比式(10-65)和式(10-69)可见，冲激不变法的原理就是把 $H_a(s)$ 部分分式展开式中的 $\frac{1}{s-s_k}$ 代之以 $\frac{1}{1-e^{s_k T}z^{-1}}$ 即得 $H(z)$[参看 8.6 节式(8-58)和式(8-60)]，示意写作

$$\frac{1}{s-s_k}\Longrightarrow\frac{1}{1-e^{s_k T}z^{-1}} \tag{10-70}$$

此结果表明，极点 s_k 映射到 z 平面是位于 $z=e^{s_k T}$ 处之极点，若 s_k 在左半平面则 $e^{s_k T}$ 位于单位圆之内，因而滤波器的稳定性可以保证。

上面只给出了 $h_a(t)$ 经抽样产生 $h(n)$ 之后 $H_a(s)$ 与 $H(z)$ 的对应关系，还没有建立 $H_a(s)$ 与 $H(z)$ 之间的关系式，下面给出推导过程。前面已经知道

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}\Big[\sum_{n=-\infty}^{\infty}h_a(t)\delta(t-nT)\Big]\\&=\sum_{n=0}^{\infty}h_a(nT)e^{-nsT}=\sum_{n=0}^{\infty}h(n)z^{-n}\Big|_{z=e^{sT}}=H(z)\Big|_{z=e^{sT}}\end{aligned} \tag{10-71}$$

如果将冲激序列 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$ 用傅氏级数展开，取抽样信号的拉氏变换并借助 s 域频移定理可得

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\Big[h_a(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)\Big]&=\mathscr{L}\Big[h_a(t)\cdot\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{j\frac{2\pi}{T}kt}\Big]\\&=\frac{1}{T}\mathscr{L}\Big[\sum_{k=-\infty}^{\infty}h_a(t)e^{j\frac{2\pi}{T}kt}\Big]\\&=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}H_a\Big(s+j\frac{2\pi}{T}k\Big)\end{aligned} \tag{10-72}$$

由以上二式结果得出

$$H(z)\Big|_{z=e^{sT}}=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}H_a\Big(s+j\frac{2\pi}{T}k\Big) \tag{10-73}$$

这表明，z 平面与 s 平面的映射呈多值对应关系。若 $s=\sigma+j\Omega$，$z=re^{j\omega}$ 则 $r=e^{\sigma T}$，$\omega=\Omega T$。多值映射关系也可从下式看出

$$z=e^{sT}=e^{\sigma T}e^{j\left(\Omega+\frac{2\pi}{T}k\right)T} \tag{10-74}$$

当 σ 不变，Ω 以 $\frac{2\pi}{T}$ 整倍数改变时，映射值不变，也就是将 s 平面沿着 $j\Omega$ 轴分割

成一条条宽为 $\frac{2\pi}{T}$ 的水平带，每条带都按前面分析的关系映射成整个 z 平面，如图 10－36 所示。s 平面与 z 平面间映射的多值性是冲激不变法的一个缺点。

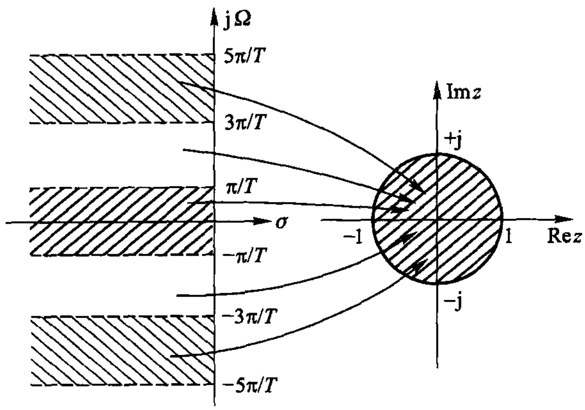


图 10－36　冲激不变法 s 平面与 z 平面映射关系

由于冲激不变法是对 $h_a(t)$ 抽样的结果，因而就频率特性而言就有频谱混叠，如图 10－37 所示。s 平面的虚轴 $j\Omega$ 可以映射成 z 平面的单位圆，而且 ω 与 Ω 呈线性关系。由式(10－73)得

$$H(e^{j\omega})=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}H_a\left(j\frac{\omega}{T}+j\frac{2\pi}{T}k\right) \tag{10-75}$$

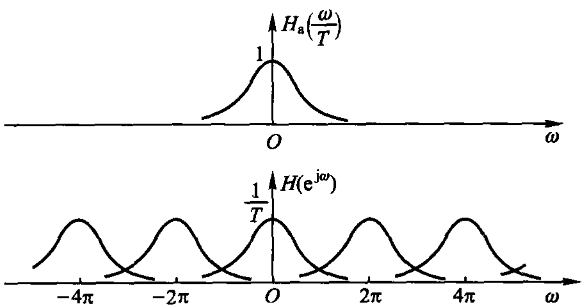


图 10－37　冲激不变法中的频谱混叠现象

综上所述，对冲激不变法可得如下结论：它可以把稳定的模拟滤波器变换成稳定的数字滤波器，变换时频率间呈线性关系 $\omega=\Omega T$，频率特性形状基本上与模拟滤波器相同(如果混叠不严重)，在时域两者冲激响应形状一致。由于混叠的结果，使频率特性高端严重失真，因而只适用于低通滤波器或限带 $\left(0\leqslant\Omega\leqslant\frac{\pi}{T}\right)$ 的高通或带通场合。再由式(10－75)可见，数字滤波器的增益与

T 成反比，过高的抽样率可以减小混叠，而同时使滤波器增益过高，为此有时 $h(n)$ 的设计值采用 $Th_a(nT)$，以保持转换后数字滤波器增益不变。

例 10－12 给定通带内具有 3 dB 起伏（对应 $\varepsilon=0.997\,6$）、$N=2$ 的二阶切比雪夫低通模拟滤波器系统函数[参看表 10－3 和式(10－27)]

$$H_a(s)=\frac{0.501\,2}{s^2+0.644\,9s+0.707\,9}$$

用冲激不变法求对应的数字滤波器系统函数 $H(z)$。

解 将 $H_a(s)$ 展开成部分分式形式

$$H_a(s)=\frac{\mathrm{j}\,0.322\,4}{s+0.322\,4+\mathrm{j}\,0.777\,2}+\frac{-\mathrm{j}\,0.322\,4}{s+0.322\,4-\mathrm{j}\,0.777\,2}$$

用式(10－70)进行变换得

$$H(z)=\frac{\mathrm{j}\,0.322\,4}{1-\mathrm{e}^{-(0.322\,4+\mathrm{j}0.777\,2)T}z^{-1}}+\frac{-\mathrm{j}\,0.322\,4}{1-\mathrm{e}^{-(0.322\,4-\mathrm{j}0.777\,2)T}z^{-1}}$$

$$=\frac{2\mathrm{e}^{-0.322\,4T}\cdot 0.322\,4\sin(0.777\,2T)\cdot z^{-1}}{1-2\mathrm{e}^{-0.322\,4T}\cos(0.777\,2T)z^{-1}+\mathrm{e}^{-0.644\,9T}z^{-2}}$$

由于给定的是 $H_a(s)$，因而变换到数字滤波器时与抽样间隔 T 有关，图 10－38 分别画出了不同 T 时，数字滤波器的对数幅频特性 $20\lg|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|$ $\left(\text{为便于比较，图中横坐标用}\frac{\omega}{T}=\Omega'\text{进行标注}\right)$。当 $T=1$ s 时

$$H(z)=\frac{0.327\,6z^{-1}}{1-1.032\,8z^{-1}+0.524\,7z^{-2}}$$

当 $T=0.1$ s 时

$$H(z)=\frac{0.048\,5z^{-1}}{1-1.930\,7z^{-1}+0.937\,5z^{-2}}$$

从图 10－38 看出模拟与数字滤波器幅频特性主要差异在 $\omega=\pi$ 处，因为对冲激不变法在此频率上有混叠，提高抽样率可以减小混叠效应。

例 10－13 试用冲激不变法设计一数字低通滤波器。给定技术指标为

通带允许起伏 －3 dB $0\leqslant\omega\leqslant 0.318\pi$

阻带衰减 $\leqslant -15$ dB $0.8\pi\leqslant\omega\leqslant\pi$

通带内具有等波纹特性，求此数字滤波器 $H(z)$。

解 按图 10－35 所示流程图

(1) 求模拟滤波器技术指标

由于要求用冲激不变法设计，因此模拟角频率 Ω 与数字角频率 ω 之间的关系是 $\omega=\Omega T$。现给定 ω 指标，因而 T 可以任意选择，为方便计选 $T=1$，则模拟滤波器指标为

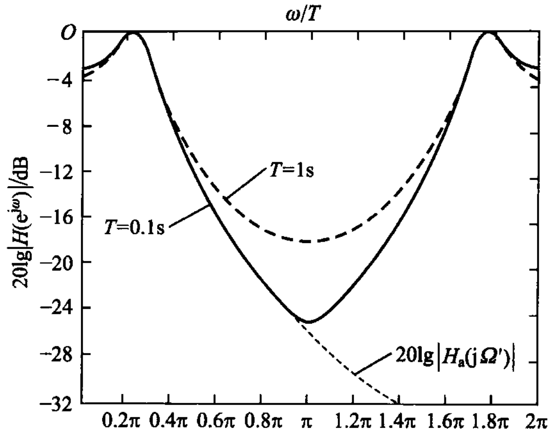


图 10－38　例 10－12 数字滤波器对数幅频特性

$$\Omega_c = \frac{\omega_c}{T} = 0.318\pi \text{ rad/s}$$

$$\Omega_s = \frac{\omega_s}{T} = 0.8\pi \text{ rad/s}$$

（2）设计模拟滤波器，并求出 $H_a(s)$

要求通带内具有等波纹，所以用切比雪夫滤波特性。

求波纹参数 ε：

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} = 10^{-\frac{3}{20}}$$

得

$$\varepsilon = 0.997\ 63$$

求滤波器的阶数 N：

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2 T_N^2\left(\frac{0.8\pi}{0.318\pi}\right)}} = 10^{-\frac{15}{20}}$$

$$T_N\left(\frac{0.8\pi}{0.318\pi}\right) = \frac{1}{0.997\ 63}\sqrt{10^{\frac{15}{10}}-1} = 5.546\ 9$$

$$N = \frac{\operatorname{arcosh}(5.546\ 9)}{\operatorname{arcosh}\left(\frac{0.8\pi}{0.318\pi}\right)} = 1.5$$

取 $N=2$，在冲激不变法设计中为减小高频端的混叠，通常让通带满足指标要求，阻带指标留有余量。

至此可以看出，本例的条件（ε 值和 N 值）与前面例10－12完全相同，于是写

出

$$H_a(s)=\frac{0.5012}{s^2+0.6449s+0.7079}$$

(3) 用冲激不变法求 $H(z)$

由于(2) 中的 $H_a(s)$就是例 10－12 中给的 $H_a(s)$,所以最终结果同例 10－12,对应数字滤波器的对数幅频特性如图 10－38 中的虚线($T=1$ s)所示。混叠现象比较明显。

(二) 双线性变换法

上面讨论的冲激不变法,其 s 域与 z 域的映射关系具有多值性,在频域有混叠现象,因而只适用于低通或限带的高通、带通情况。这里将要讨论的双线性变换克服了混叠效应,使 s 域与 z 域的映射是单值对应关系,保持了滤波器的原有滤波特性。

双线性变换的目标是把 s 域 Ω 值从 0 到 $\pm\infty$ 的分布压缩至 0 到 $\pm\pi$ 之间,这样变换到 z 域就不会出现周期重复,即可构成单值映射。下面利用微分方程表示为差分方程的关系导出双线性变换映射规律。

若模拟滤波器系统函数为

$$H_a(s)=\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{s-s_k} \tag{10－76}$$

考虑其中每个一阶微分方程对应的系统函数

$$H_k(s)=\frac{A_k}{s-s_k} \tag{10－77}$$

写作微分方程形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)-s_k y(t)=A_k x(t) \tag{10－78}$$

将 $y(t)$用 $y'(t)$的积分表示

$$y(t)=\int_{t_0}^{t}y'(\tau)\mathrm{d}\tau+y(t_0)$$

令数值抽样步长为 T, $t=nT$, $t_0=(n-1)T$,则

$$y(nT)=\int_{(n-1)T}^{nT}y'(\tau)\mathrm{d}\tau+y[(n-1)T] \tag{10－79}$$

用梯形法逼近积分项,经整理上式得到

$$\frac{1}{T}\{y(nT)-y[(n-1)T]\}\approx\frac{1}{2}\{y'(nT)+y'[(n-1)T]\} \tag{10－80}$$

此式右端表示相邻两抽样点导数之平均值,而左端是两抽样点差值与步长之比,显然,二者近似相等。

令式(10－78)中的 $t=nT$ 代入式(10－80)并取 z 变换得到

$$Y(z)(1-z^{-1})=\frac{T}{2}s_kY(z)(1+z^{-1})+\frac{T}{2}A_kX(z)(1+z^{-1}) \tag{10-81}$$

整理此式，取 $Y(z)$与 $X(z)$之比得到

$$H_k(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{A_k}{\frac{2}{T}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)-s_k} \tag{10-82}$$

对照式(10－77)与式(10－82)求出 s 与 z 对应关系

$$s=\frac{2}{T}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) \tag{10-83}$$

按此规律，将模拟滤波器 $H_a(s)$中的变量 s 用式(10－83)代入即可得到数字滤波器之系统函数 $H(z)$。解式(10－83)还可得到

$$z=\frac{1+(sT/2)}{1-(sT/2)} \tag{10-84}$$

式(10－83)和式(10－84)中的分子与分母都是变量的线性函数，此即双线性变换名称之由来，此变换为单值对应。通过式(10－84)可以得出 s 域与 z 域的映射关系：设 $s=\sigma+\mathrm{j}\Omega$，$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}$，则

$$r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}=\frac{1+\frac{T}{2}(\sigma+\mathrm{j}\Omega)}{1-\frac{T}{2}(\sigma+\mathrm{j}\Omega)}$$

$$=\sqrt{\frac{\left(1+\frac{T}{2}\sigma\right)^2+\left(\frac{\Omega T}{2}\right)^2}{\left(1-\frac{T}{2}\sigma\right)^2+\left(\frac{\Omega T}{2}\right)^2}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left\{\arctan\left[\left(\frac{\Omega T}{2}\right)/\left(1+\frac{T}{2}\sigma\right)\right]+\arctan\left[\left(\frac{\Omega T}{2}\right)/\left(1-\frac{T}{2}\sigma\right)\right]\right\}}$$

对 s 域的左半平面，$\sigma=\mathrm{Re}[s]<0$，$r<1$，因而通过变换 s 的左半平面映射到 z 平面单位圆内，也就是稳定的 $H_a(s)$可以变换成稳定的 $H(z)$。

对 s 平面的虚轴 $s=\mathrm{j}\Omega$，$\sigma=0$ 有 $r=1$，且

$$\omega=2\arctan\left(\frac{\Omega T}{2}\right) \tag{10-85}$$

或

$$\Omega=\frac{2}{T}\tan\left(\frac{\omega}{2}\right) \tag{10-86}$$

这表明，s 平面的虚轴映射到 z 平面的单位圆，而且 $\Omega=\pm\infty$映射为 $\omega=\pm\pi$，Ω 与 ω 呈单值映射，可以避免混叠。但是式(10－85)或式(10－86)表明，双线性变换是非线性变换，如图 10－39 所示，频率特性会引起失真。因此在利用双线性变换设计滤波器时，为最终得到与设计要求一致的数字频率，在指标转换过程中必须作预畸变校正。对于要求线性相移的情况，必须考虑引入的相位畸变是否允许。

例 10－14　试用双线性变换法设计一数字低通滤波器。给定技术指标：

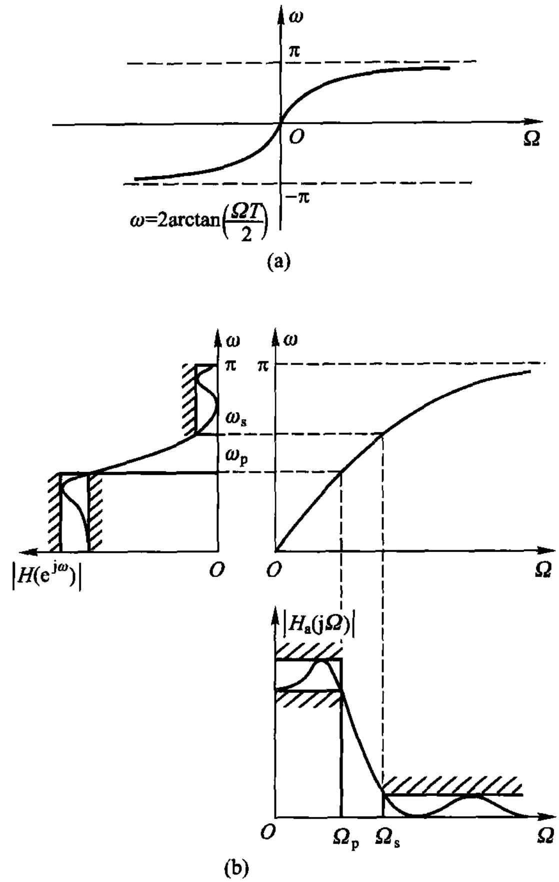


图 10－39　双线性变换频率变换关系

通带允许起伏 －3 dB　$0\leqslant\omega\leqslant 0.318\pi$

阻带衰减　$\leqslant -20$ dB　$0.8\pi\leqslant\omega\leqslant\pi$

通带内具有等波纹特性，求此数字滤波器 $H(z)$。

解　按图 10－35 所示流程图求解。

(1) 求模拟滤波器技术指标

由于用双线性变换，因此求模拟滤波器的指标时用式(10－86)的频率预畸变

$$\Omega_c=\frac{2}{T}\tan\left(\frac{1}{2}\times 0.318\pi\right)=1.0926\ \text{rad/s}$$

$$\Omega_s=\frac{2}{T}\tan\left(\frac{1}{2}\times 0.8\pi\right)=6.1554\ \text{rad/s}$$

为方便这里取 $T=1$。

(2) 设计模拟滤波器,并求出 $H_a(s)$。

由例 10－13 求得波纹参数 $\varepsilon=0.997\ 63$。

求滤波器阶数 N

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2 T_N^2\left(\frac{6.155\ 4}{1.092\ 6}\right)}}=10^{-\frac{20}{20}}$$

$$N=\frac{\operatorname{arcosh}\left(\frac{1}{0.997\ 63}\sqrt{10^{\frac{20}{10}}-1}\right)}{\operatorname{arcosh}\left(\frac{6.155\ 4}{1.092\ 6}\right)}=1.24$$

取 $N=2$,由于是双线性变换,没有高频端混叠,因而让阻带满足指标要求,通带指标留有余量,以便减小信号通过滤波器时的失真。按照 $N=2$ 的条件重新求截止角频率 Ω_c

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2 T_2^2\left(\frac{6.155\ 4}{\Omega_c}\right)}}=10^{-\frac{20}{20}}$$

$$\Omega_c=\frac{6.155\ 4}{\cosh\left[\frac{1}{2}\operatorname{arcosh}\left(\frac{1}{0.997\ 63}\sqrt{10^2-1}\right)\right]}=2.627\ 8\ \text{rad/s}$$

解至此处可看到本例的条件与例 10－12 相同,即要求设计 $N=2$、通带内起伏为 3 dB 的切比雪夫逼近滤波器。归一化低通原型滤波器系统函数表达式仍同例 10－12。由于本例预畸变运算使这里的 Ω_c 不等于 1,因此需进行解归一化,求得

$$H_a(s)=\frac{0.501\ 2\times(2.627\ 8)^2}{s^2+0.644\ 9s\times 2.627\ 8+0.707\ 9\times(2.627\ 8)^2}$$
$$=\frac{3.460\ 9}{s^2+1.694\ 7s+4.888\ 6}$$

(3) 用双线性变换求 $H(z)$

$$H(z)=\frac{3.460\ 9}{\left[2\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)\right]^2+1.694\ 7\left[2\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)\right]+4.888\ 6}$$
$$=\frac{0.281\ 9(1+z^{-1})^2}{1+0.144\ 7z^{-1}+0.447\ 9z^{-2}}$$

图 10 - 40 画出了 $H(z)$ 的幅频、对数幅频和相频特性。由于用双线性变换，频率特性高端经非线性变换下降很快，阻带衰减性能比冲激不变法好。其次相频特性的非线性较为严重，原因是切比雪夫带内起伏及双线性变换的非线性两者引起的。

至此只讨论了低通数字滤波器的设计实例，对于其他类型的滤波器，可以先对低通原型模拟滤波器进行频率变换，给出高通、带通等类型的模拟滤波器，再利用双线性变换即可完成数字滤波器的设计。还有一种方法是先设计低通原型数字滤波器，然后经数字域的频率变换实现其他类型的数字滤波器。此外，还应指出，当利用数字滤波器处理模拟信号时(如图 10 - 2 所示)，由于A/D、D/A 转换的作用，将引入数值误差(类似于 5.10 节指出的 PCM 信号将引入量化噪声)，在数字滤波器设计中称为"有限字长效应"。如果对滤波器设计精度要求较严格，还需考虑如何减少此效应之影响。

限于篇幅，以上两方面的问题都不再介绍。

(三) IIR 数字滤波器的结构实现

数字滤波器的实现问题比模拟滤波器简单，对于 IIR 滤波器，用如式(10 - 63)表示的系统函数，在时域就是差分方程

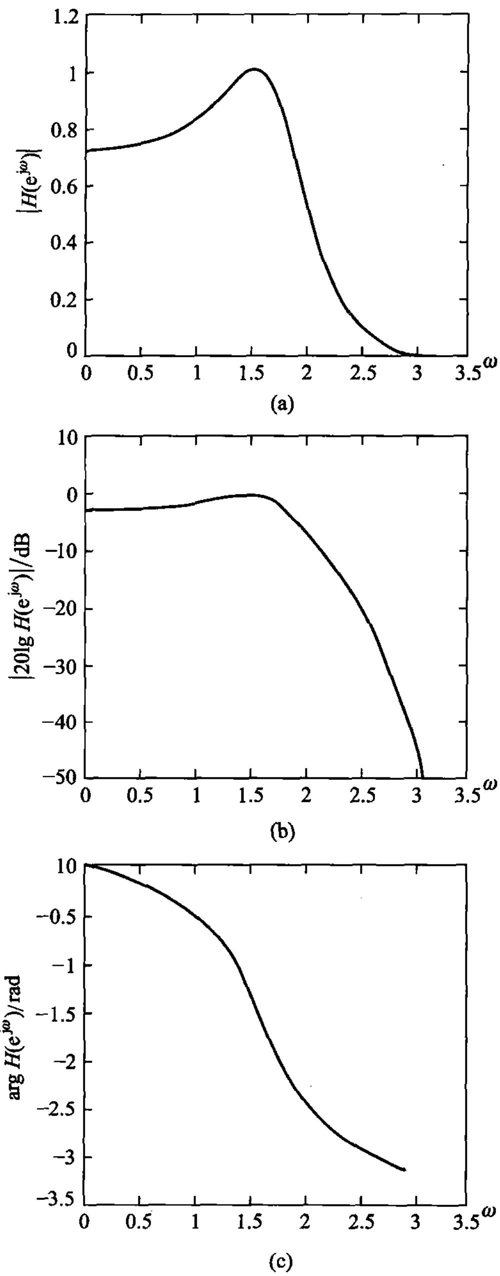
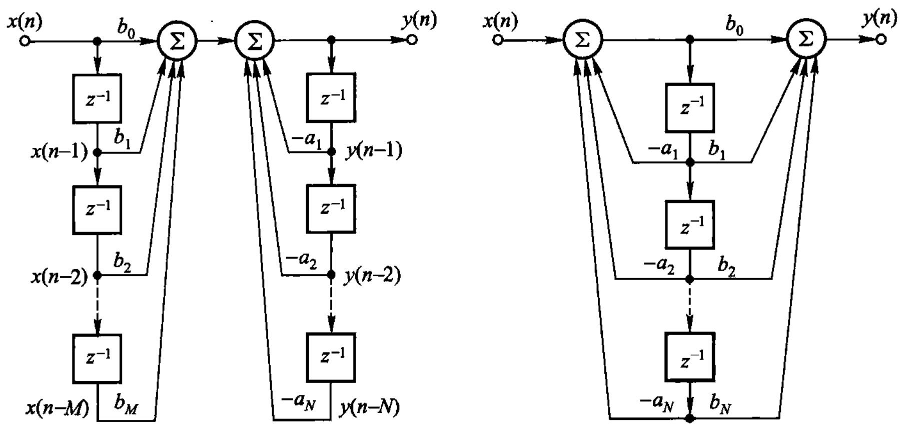


图 10 - 40 例 10 - 14 数字低通滤波器幅频、对数幅频、相频特性

$$y(n)=\sum_{r=0}^{M}b_r x(n-r)-\sum_{k=1}^{N}a_k y(n-k) \tag{10-87}$$

可见实现这一算法所用的基本运算部件是加法器、乘法器和延时单元，图10-41画出了实现式(10-87)差分方程的框图。从图中可以看出输入部分及其延时加权求和只与式(10-63)的分子有关，因而实际实现的是系统零点；第二部分是$y(n)$延时反馈相加，实现的是式(10-63)的极点部分。如果把实现方式交换次序，即先实现极点部分，后实现零点部分，则其中的延时单元可以合并共用，构成如图10-41(b)所示的框图结构形式。通常称第一种实现为直接形式Ⅰ，第二种实现为直接形式Ⅱ。后者的延时单元个数等于差分方程阶数，是延时单元最少的实现，有时也称为典范结构实现。根据差分方程和式(10-63)表示的系统函数得到的直接形式实现统称为递归型结构，主要优点是简单直观。对直接形式Ⅱ延时单元最少，也是乘法次数比较少的一种。但缺点是在阶数比较高的情况下，要求系数精度高，调整特性不方便，每一系数的变化都将影响极(零)点的分布。



(a) 直接形式Ⅰ　　(b) 直接形式Ⅱ

图 10-41 IIR 滤波器的直接型实现

如果对式(10-63)表示的系统进行因式分解

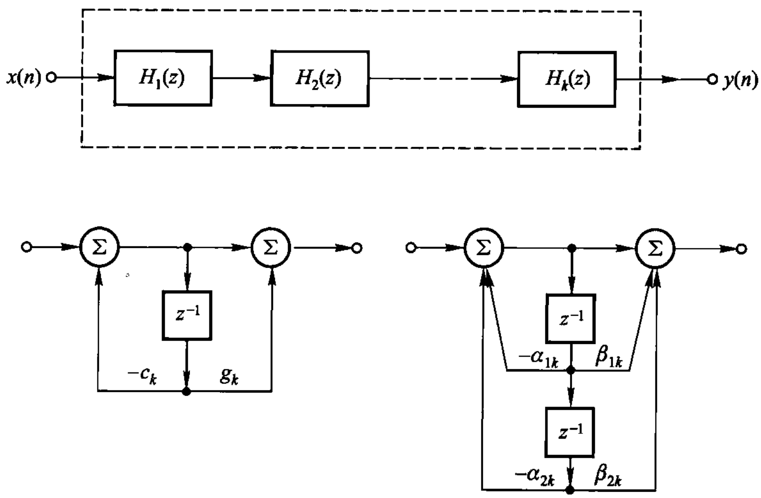
$$H(z)=A\frac{\prod_{k=1}^{M_1}(1+g_k z^{-1})\prod_{k=1}^{M_2}(1+\beta_{1k}z^{-1}+\beta_{2k}z^{-2})}{\prod_{k=1}^{N_1}(1+c_k z^{-1})\prod_{k=1}^{N_2}(1+\alpha_{1k}z^{-1}+\alpha_{2k}z^{-2})} \tag{10-88}$$

式中分子、分母都是实系数，二阶多项式表示具有共轭复根的情况。因此整个系

统可以看成递归的一阶子系统和递归的二阶子系统的级联形成，由此构成的系统实现称为级联型实现

$$H(z)=H_1(z)H_2(z)\cdots H_k(z) \tag{10-89}$$

其结构框图如图 10－42 所示。其中每一子系统是一阶或二阶的。级联系统也属于最少延时单元实现，但乘法次数明显比直接型要多。级联实现的优点是每个二阶或一阶子系统单独控制零、极点，因而便于调整，同时在系数量化时对系统性能影响小。调整各子系统前后排列次序对有限字长引起的量化效应是有影响的，通常可通过计算机仿真确定子系统的组合及排序。



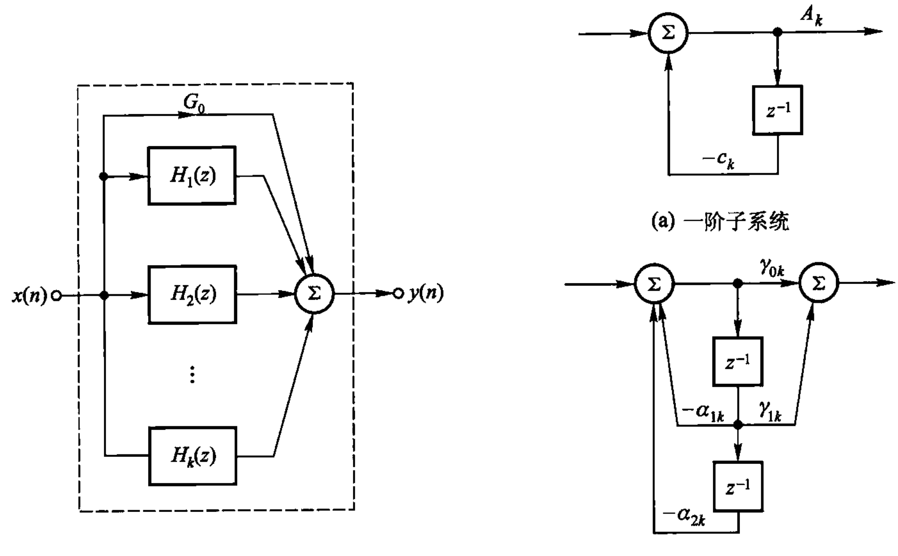
(a) 一阶子系统　　(b) 二阶子系统

图 10－42　IIR 滤波器的级联型实现

对式(10－63)表示的系统函数作部分分式展开

$$H(z)=\frac{\sum_{r=0}^{M}b_r z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{N}a_k z^{-k}}=G_0+\sum_{k=1}^{N_1}\frac{A_k}{1+c_k z^{-1}}+\sum_{k=1}^{N_2}\frac{\gamma_{0k}+\gamma_{1k}z^{-1}}{1+\alpha_{1k}z^{-1}+\alpha_{2k}z^{-2}} \tag{10-90}$$

其中每一项都是一阶或二阶子系统。由此构成系统框图如图 10－43 所示，这种实现称为并联型实现。并联系统可看成对输入信号进行并行滤波，因而运行速度高，而且没有运算误差的前后级积累影响，有限字长引起的量化效应小。由于是用部分分式展开，因此极点可单独调整，但缺点是零点无法控制，当需要准确控制滤波零点时，就不能应用并联型结构。



(a) 一阶子系统

(b) 二阶子系统

图 10－43　IIR 滤波器并联型实现

无限冲激响应滤波器结构实现除上面列举的几种形式外还有其他方式，主要考虑的出发点是存储单元和乘法器的数量、运行速度及有限字长效应等，其次还要考虑在不同应用场合适应不同算法的特殊结构。当学习了信号流图表示及其特性后（第十一章 11.6 节），对数字滤波器的各种结构可以有更深入的理解。

10.7　有限冲激响应（FIR）数字滤波器

这种滤波器的设计工作也按两步进行。第一步是由给定的频响特性容差决定逼近函数，但逼近函数的确定与本章前面采用的方式完全不同，这里是从寻找适当的 $H(e^{j\omega})$ 出发，选择有限冲激响应 $h(n)$，以如下的形式给出 $H(z)$ 函数

$$H(z)=\sum_{k=0}^{N-1}b_kz^{-k}=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)z^{-n} \tag{10-91}$$

根据不同的逼近准则确定滤波器的节数 N，并验证 $H(e^{j\omega})$ 是否符合要求；第二步仍是由 $H(z)$ 表达式实现系统结构。由式（10－91）可以看出，这种滤波器有 $(N-1)$ 个零点，且为有限值，全部极点位于 z 平面的原点，因此，系统是稳定的。另一方面，FIR 滤波器可以做到严格的线性相移，而 IIR 滤波器的相位特性呈现非线性，这是 FIR 滤波器最突出的优点。下面首先讨论 FIR 滤波器幅频与

相频特性的特点，然后给出逼近与实现原理，最后全面比较 IIR 与 FIR 两种滤波器的优缺点。

若有限长的实序列 $h(n)$ 满足偶对称条件

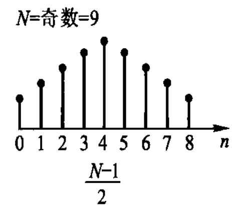
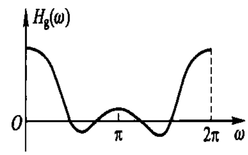
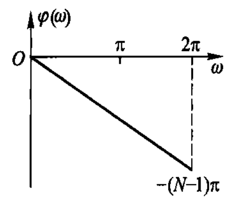
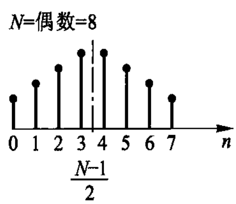
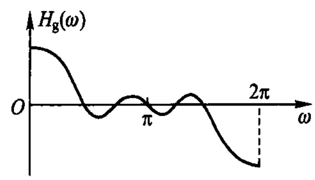
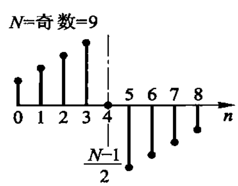
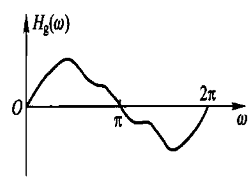
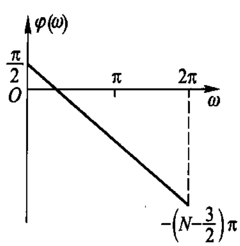
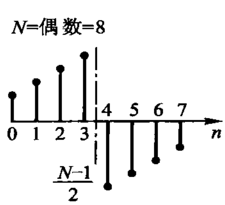
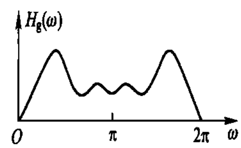
$$h(n)=h(N-1-n) \tag{10-92}$$

或奇对称条件

$$h(n)=-h(N-1-n) \tag{10-93}$$

它们对应的频率特性具有线性相位。若再考虑到 N 为偶数和奇数时的不同情况，可以得到四种不同频域幅度响应。表 10-9 列出了四种不同的滤波特性，下面分别说明。

表 10-9 四种线性相位 FIR 滤波特性

情况 1	$h(n)$偶对称 $h(n)=h(N-1-n)$ $H(e^{j\omega})=H_g(\omega)e^{-j\alpha\omega}$ $\alpha=\dfrac{N-1}{2}$		
情况 2			
情况 3	$h(n)$奇对称 $h(n)=-h(N-1-n)$ $H(e^{j\omega})=H_g(\omega)e^{j\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\omega\right)}$ $\alpha=\dfrac{N-1}{2}$		
情况 4			

情况 1：$h(n)$ 满足偶对称条件式(10-92)，且 N = 奇数

$$H(z)=\sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}}h(n)z^{-n}+h\left(\frac{N-1}{2}\right)z^{-\frac{N-1}{2}}+\sum_{n=\frac{N+1}{2}}^{N-1}h(n)z^{-n}$$

对上式第三项作变量代换，令 $m=N-1-n$

$$\begin{aligned}H(z)=&\sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}}h(n)z^{-n}+h\left(\frac{N-1}{2}\right)z^{-\frac{N-1}{2}}+\\&\sum_{m=0}^{\frac{N-3}{2}}h(N-1-m)z^{-(N-1-m)}\\=&\sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}}h(n)\left[z^{-n}+z^{-(N-1-n)}\right]+h\left(\frac{N-1}{2}\right)z^{-\frac{N-1}{2}}\\=&z^{-\frac{N-1}{2}}\left\{\sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}}h(n)\left[z^{\left(\frac{N-1}{2}-n\right)}+z^{-\left(\frac{N-1}{2}-n\right)}\right]+h\left(\frac{N-1}{2}\right)\right\}\end{aligned}\tag{10-94}$$

对应的频率特性，令 $z=e^{j\omega}$

$$\begin{aligned}H(e^{j\omega})=&e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega}\left\{\sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}}h(n)\left[e^{j\omega\left(\frac{N-1}{2}-n\right)}+e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}-n\right)}\right]+h\left(\frac{N-1}{2}\right)\right\}\\=&e^{-j\alpha\omega}\left\{\sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}}2h(n)\cos\left[\omega\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\right]+h\left(\frac{N-1}{2}\right)\right\}\end{aligned}\tag{10-95}$$

设 $m=\dfrac{N-1}{2}-n$，且令

$$a(m)=\begin{cases}h\left(\dfrac{N-1}{2}\right) & m=0\\ 2h\left(\dfrac{N-1}{2}-m\right) & m=1,2,\cdots,\dfrac{N-1}{2}\end{cases}\tag{10-96}$$

则 $H(e^{j\omega})$可以写成

$$H(e^{j\omega})=e^{-j\alpha\omega}\sum_{m=0}^{\frac{N-1}{2}}a(m)\cos(m\omega)=H_g(\omega)e^{-j\alpha\omega}\tag{10-97}$$

这表明当 $h(n)$满足偶对称条件时，FIR 滤波器具有线性相位，而且相位常数 $\alpha=\dfrac{N-1}{2}$。频域幅度特性 $H_g(\omega)=\sum_{m=0}^{\frac{N-1}{2}}a(m)\cos(m\omega)$是 ω 的实函数，且在 $\omega=0,\pi,2\pi$ 处具有偶对称特性，如表 10－9 情况 1 所示。通常定义幅频特性 $|H(e^{j\omega})|$是 ω 的正实函数，和这里定义的频域幅度特性$H_g(\omega)$关系为 $H_g(\omega)=\pm|H(e^{j\omega})|$，$H_g(\omega)$值有正有负。

情况 2:$h(n)$具有偶对称条件,且 $N=$偶数

与情况 1 的区别是没有 $h\left(\frac{N-1}{2}\right)$这一项,而且式(10-95)频率特性简化为

$$H(e^{j\omega})=e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega}\left\{\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}h(n)\left[e^{j\omega\left(\frac{N-1}{2}-n\right)}+e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}-n\right)}\right]\right\}$$

$$=e^{-j\alpha\omega}\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}2h(n)\cos\left[\omega\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\right] \qquad (10-98)$$

设 $m=\frac{N}{2}-n$,且令

$$b(m)=2h\left(\frac{N}{2}-m\right) \qquad m=1,2,\cdots,\frac{N}{2} \qquad (10-99)$$

则 $H(e^{j\omega})$写成

$$H(e^{j\omega})=e^{-j\alpha\omega}\sum_{m=1}^{\frac{N}{2}}b(m)\cos\left[\omega\left(m-\frac{1}{2}\right)\right]=H_g(\omega)e^{-j\alpha\omega} \quad (10-100)$$

这种情况相位常数 $\alpha=\frac{N-1}{2}$,但已不是整数。频域幅度特性 $H_g(\omega)=\sum_{m=1}^{\frac{N}{2}}b(m)\cos\left[\omega\left(m-\frac{1}{2}\right)\right]$是 ω 的实函数,在 $\omega=0,2\pi$ 处具有偶对称特性;在 $\omega=\pi$处具有奇对称,且 $\omega=\pi$ 时,$H_g(\pi)=0$,相当于 $H(z)$在 $z=-1$ 处有一零点,因而具有这种特性的 FIR 滤波器无法实现高通和带阻特性。

情况 3:$h(n)$具有奇对称条件式(10-93),且 $N=$奇数

与情况 1 式(10-94)相似,只不过此时 $h\left(\frac{N-1}{2}\right)=0$,$h(n)$的前后部分相差一个负号,所以有

$$H(e^{j\omega})=e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega}\left\{\sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}}h(n)\left[e^{j\omega\left(\frac{N-1}{2}-n\right)}-e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}-n\right)}\right]\right\}$$

$$=e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega}\left\{j\sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}}2h(n)\sin\left[\omega\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\right]\right\} \qquad (10-101)$$

设 $m=\frac{N-1}{2}-n$,且令

$$c(m)=2h\left(\frac{N-1}{2}-m\right) \qquad m=1,2,\cdots,\frac{N-1}{2}$$

则

$$H(e^{j\omega})=e^{-j\alpha\omega}j\sum_{m=1}^{\frac{N-1}{2}}c(m)\sin(m\omega)=e^{j\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\omega\right)}\cdot H_g(\omega) \qquad (10-102)$$

这种情况，系统的相频特性

$$\varphi(\omega)=\frac{\pi}{2}-\alpha\omega \tag{10-103}$$

这表明 $\varphi(\omega)$ 有 $\frac{\pi}{2}$ 的起始相移，信号所有频率分量经滤波器后都有固定的 90°移相，相当于宽带 90°移相器。严格来说 $\varphi(\omega)$ 不具有线性相位特性，但是它满足群时延为常数的条件：

$$\tau_g(\omega)=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\varphi(\omega)=\alpha \tag{10-104}$$

所以仍然属于线性相位情况，而且相移常数 $\alpha=\frac{N-1}{2}$。频域幅度特性 $H_g(\omega)=\sum_{m=1}^{\frac{N-1}{2}}c(m)\sin(m\omega)$ 是 ω 的实函数，在 $\omega=0,\pi,2\pi$ 处具有奇对称，且在这些点 $H_g(\omega)=0$，相当于 $H(z)$ 在 $z=\pm1$ 处各有一个零点，因而具有这种特性的 FIR 滤波器无法实现低通、高通及带阻滤波特性。

情况 4：$h(n)$ 具有奇对称条件式(10-93)，且 $N=$ 偶数

把情况 3 的 $H(e^{j\omega})$ 求和上限改为 $\left(\frac{N}{2}-1\right)$：

$$H(e^{j\omega})=e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega}\left\{j\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}2h(n)\sin\left[\omega\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\right]\right\} \tag{10-105}$$

设 $m=\frac{N}{2}-n$，且令

$$d(m)=2h\left(\frac{N}{2}-m\right)\quad m=1,2,\cdots,\frac{N}{2} \tag{10-106}$$

则

$$H(e^{j\omega})=e^{-j\alpha\omega}j\sum_{m=1}^{\frac{N}{2}}d(m)\sin\left[\omega\left(m-\frac{1}{2}\right)\right]=e^{j\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\omega\right)}H_g(\omega) \tag{10-107}$$

和情况 3 一样，滤波器具有固定的 90°相移，相位常数 $\alpha=\frac{N-1}{2}$。频域幅度特性 $H_g(\omega)=\sum_{m=1}^{\frac{N}{2}}d(m)\sin\left[\omega\left(m-\frac{1}{2}\right)\right]$ 是 ω 的实函数，在 $\omega=0,2\pi$ 处具有奇对称；$H_g(0)=0$，相当于 $H(z)$ 在 $z=1$ 处是一零点，因而这种滤波特性无法实现低通、带阻滤波器。

前面已证明 $h(n)$ 只要满足偶对称或奇对称条件，它的相频特性就是线性的，而且相移常数 $\alpha=\frac{N-1}{2}$。在 $h(n)$ 为奇对称情况，滤波器有固定的 90°相移，

这在微分器、希尔伯特变换器及信号正交处理中特别有用。表 10-9 中列出的四种频域幅度特性是设计滤波器的依据。线性相位 FIR 滤波器的设计任务就是在保证线性相位条件下，即 $\varphi(\omega)=-\alpha\omega$ 或 $\varphi(\omega)=\frac{\pi}{2}-\alpha\omega$，设计 $H_g(\omega)$ 使其与要求的频域容差图在选定的逼近准则下具有最小误差。

FIR 滤波器的设计有多种方法，本书只介绍“窗函数法”，下面说明这种方法的原理。

如果要求设计的滤波器频率特性为 $H_d(e^{j\omega})$，则它的单位样值响应为

$$h_d(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_d(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \tag{10-108}$$

它有可能是无限长的而且是非因果的。为此要寻找一个因果的 $h(n)$，在相应的误差准则下最佳逼近 $h_d(n)$。窗函数法设计的初衷是使设计的滤波器频率特性 $H(e^{j\omega})$ 与要求的频率特性 $H_d(e^{j\omega})$ 在频域均方误差最小的意义下进行逼近，即

$$\varepsilon^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|H_d(e^{j\omega})-H(e^{j\omega})|^2d\omega=\min \tag{10-109}$$

则有

$$\begin{aligned}\varepsilon^2&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{n=0}^{\infty}h_d(n)e^{-j\omega n}-\sum_{n=0}^{N-1}h(n)e^{-j\omega n}\right|^2d\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\left[\sum_{n=0}^{N-1}(h_d(n)-h(n))e^{-j\omega n}+\sum_{n=N}^{\infty}h_d(n)e^{-j\omega n}\right]\cdot\right.\\&\qquad\left.\left[\sum_{m=0}^{N-1}(h_d(m)-h(m))e^{-j\omega m}+\sum_{m=N}^{\infty}h_d(m)e^{-j\omega m}\right]^*\right\}d\omega=\min\end{aligned} \tag{10-110}$$

对上式化简，可以证明只要将无限长的 $h_d(n)$ 截断取其有限项 $h(n)$ 即可使 ε^2 达到最小(习题 10-25)。若以 $R_N(n)$ 表示矩形序列，则所需 $h(n)$ 表示为

$$h(n)=h_d(n)R_N(n) \tag{10-111}$$

式中 $R_N(n)$ 称为矩形窗函数。下面以逼近理想低通滤波器为例作进一步说明。

理想低通滤波器频率特性

$$H_d(e^{j\omega})=H_d(\omega)e^{-j\omega\alpha}=\begin{cases}e^{-j\omega\alpha} & |\omega|\leqslant\omega_c\\0 & \omega_c<|\omega|<\pi\end{cases} \tag{10-112}$$

其中 $H_d(\omega)$ 是频域幅度特性，α 是相移常数。对应的单位样值响应为

$$h_{\mathrm{d}}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_{\mathrm{d}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_{\mathrm{c}}}^{\omega_{\mathrm{c}}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\alpha}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}\mathrm{d}\omega=\frac{\sin[\omega_{\mathrm{c}}(n-\alpha)]}{\pi(n-\alpha)} \tag{10-113}$$

按式(10-111)设计的长度为 N 的线性相位低通滤波器单位样值响应为

$$h(n)=h_{\mathrm{d}}(n)R_{\mathrm{N}}(n) \tag{10-114}$$

其波形如图 10-44 所示，$h_{\mathrm{d}}(n)$是无限长的、非因果的，$h(n)$是长度为 N、具有偶对称的线性相位 FIR 滤波器单位样值响应。由于 $h(n)$是对 $h_{\mathrm{d}}(n)$的截断，所以频率特性是 $H_{\mathrm{d}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$对矩形序列 $R_N(n)$频率特性的卷积结果。$R_N(n)$的傅里叶变换

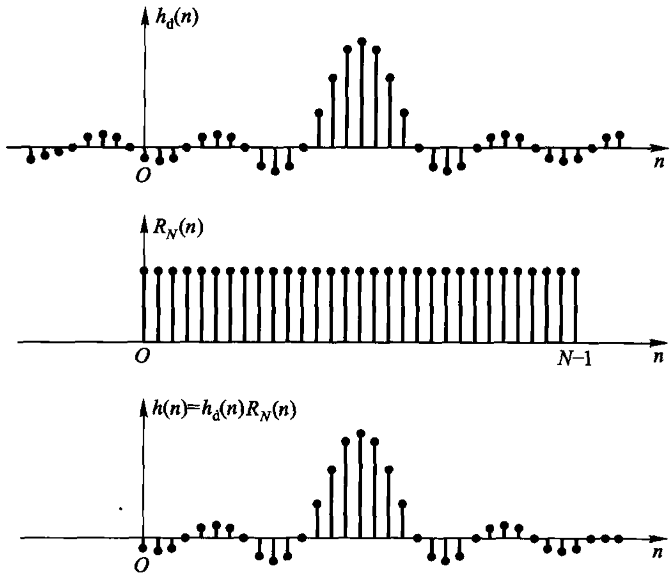


图 10-44 矩形窗对 $h_{\mathrm{d}}(n)$的截断

$$R_N(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=\sum_{n=0}^{N-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{N-1}{2}\omega}\frac{\sin\left(\frac{N\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}=R_N(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{N-1}{2}\omega} \tag{10-115}$$

其中 $R_N(\omega)=\dfrac{\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$是矩形窗的频域幅度函数。这样，设计的线性相位低通滤波器频率特性为

$$H(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)e^{-j\omega n}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_d(\theta)e^{-j\alpha\theta}R_N(\omega-\theta)e^{-j\alpha(\omega-\theta)}d\theta$$

$$=e^{-j\omega\alpha}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_d(\theta)R_N(\omega-\theta)d\theta=H_g(\omega)e^{-j\omega\alpha} \qquad (10-116)$$

其中频域幅度函数 $H_g(\omega)$是 $H_d(\omega)$与 $R_N(\omega)$卷积的结果

$$H_g(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_d(\theta)R_N(\omega-\theta)d\theta \qquad (10-117)$$

这一卷积过程及结果表示于图 10-45。

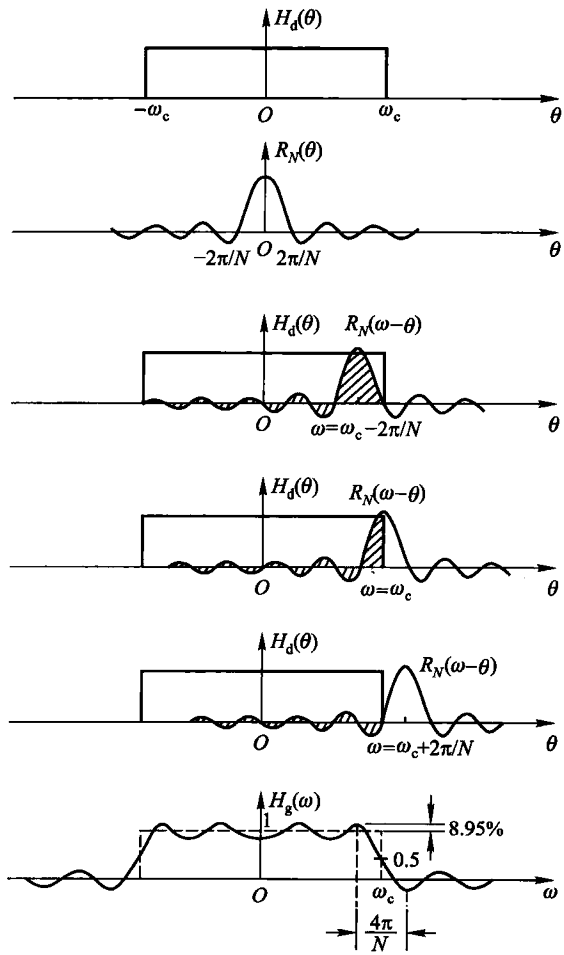


图 10-45 矩形加窗对理想低通频域幅度特性影响

比较加窗截断后的 $H_g(\omega)$ 特性与原来 $H_d(\omega)$ 特性可以得出：在 $\omega=\omega_c$ 附近形成过渡带，过渡带两边出现正、负肩峰，肩峰的间距为 $\frac{4\pi}{N}$，肩峰两侧再伸展为起伏的余振。必须注意，过渡带的间距并不等于两肩峰之间距，只是与 $\frac{4\pi}{N}$ 成正比，且小于此值。肩峰的增量值为 8.95%≈9%，这就是第三章 3.2 节和第五章 5.4 节曾指出的吉布斯现象。从理论上讲，应规定从 $H_g(\omega)=1$ 到 $H_g(\omega)=0$ 的范围为过渡带，而实际上允许此二值向中心 ω_c 点有微小偏移。经计算可求得当此允许偏移为 1.55 dB 时，过渡带的宽度为 $0.9\left(\frac{2\pi}{N}\right)$（约为两肩峰间距之半）。此外，进入阻带的负峰将影响阻带的衰减特性。对此矩形窗，9% 的负峰值相当于 21 dB 的阻带衰减，一般情况下，此数值远远不能满足阻带内衰减的要求。显然，矩形窗的逼近性能很不理想。为加大阻带衰减也即减小肩峰的影响，需采用其他形状的窗函数。通常，若窗函数时域波形两端平缓下降（而非突变，如三角形、升余弦形），则其频域特性旁瓣电平减小，从而增加阻带衰减，但其代价是增加了主瓣和过渡带的宽度。对于同一种窗函数，增加 N 值即可使过渡带减小。

常用的窗函数 $w(n)$ 有以下几种（时域宽度都取 $0\leqslant n\leqslant N-1$）：

（1）矩形窗

$$w(n)=R_N(n) \tag{10-118}$$

（2）三角窗（Bartlett 窗）

$$w(n)=\begin{cases}\dfrac{2n}{N-1} & \left(0\leqslant n\leqslant \dfrac{N-1}{2}\right)\\[2ex] 2-\dfrac{2n}{N-1} & \left(\dfrac{N-1}{2}\leqslant n\leqslant N-1\right)\end{cases} \tag{10-119}$$

（3）汉宁（Hanning）窗（升余弦窗）

$$w(n)=\frac{1}{2}\left[1-\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)\right]\quad (0\leqslant n\leqslant N-1) \tag{10-120}$$

（4）汉明（Hamming）窗（改进升余弦窗）

$$w(n)=0.54-0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)\quad (0\leqslant n\leqslant N-1) \tag{10-121}$$

（5）布莱克曼（Blackman）窗（二阶升余弦窗）

$$w(n)=0.42-0.5\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)+0.08\cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right)\quad (0\leqslant n\leqslant N-1) \tag{10-122}$$

它们的时域波形和对数幅频特性如图 10－46 所示。表 10－10 列出了五种窗函数特性及加权后相应滤波器达到的指标，可供设计者参考。例如，若选用汉宁窗，最大旁瓣电平为 －32 dB，最大阻带起伏随之改善为 －44 dB，优于矩形窗，但

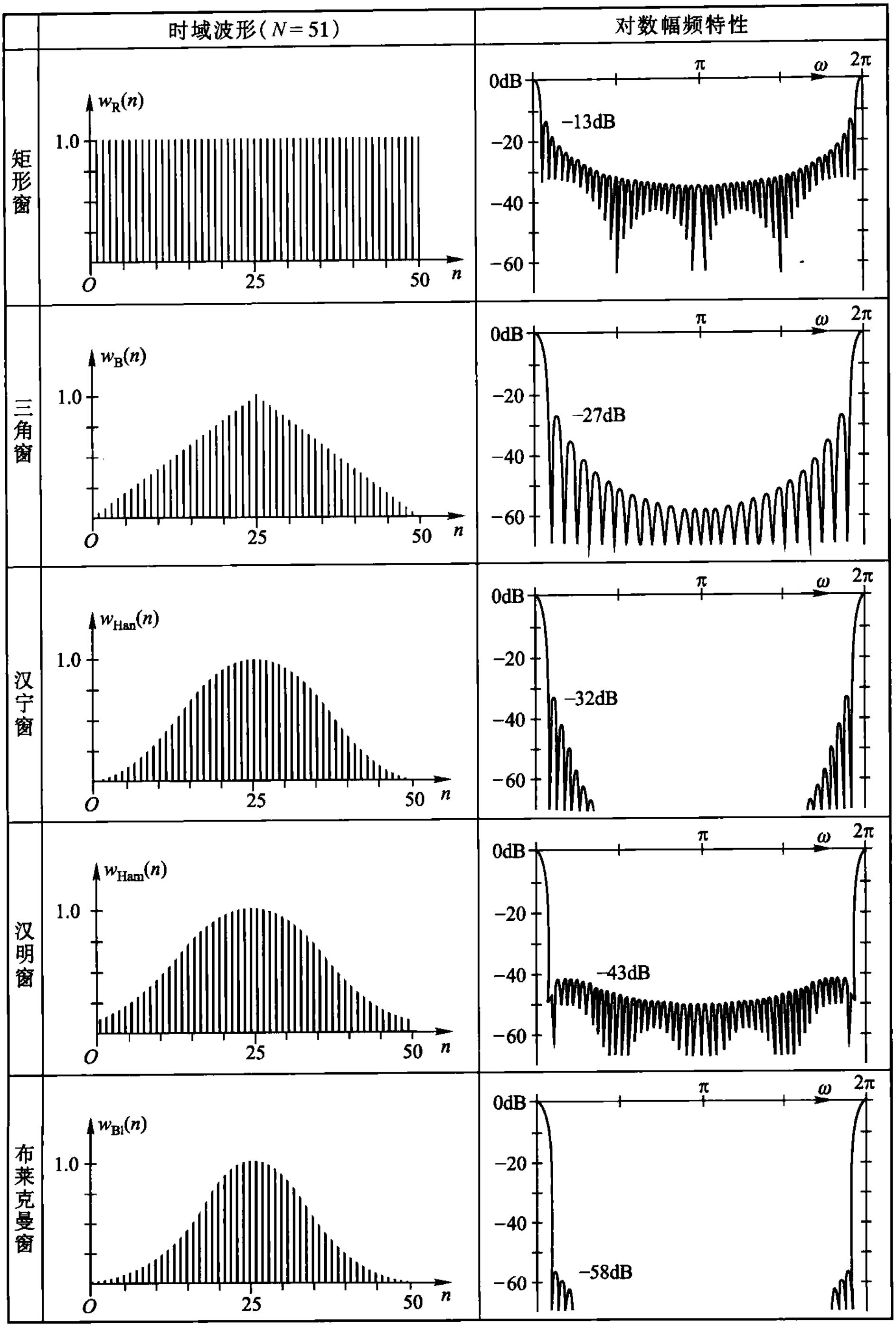


图 10-46 五种窗函数时域波形(N=51)及对数幅频特性

是主瓣宽度为 $4\left(\frac{2\pi}{N}\right)$，过渡带宽 $3.1\left(\frac{2\pi}{N}\right)$，都比矩形窗加大了，对同样指标要求，所需 N 值加大。此外，还需指出，由于各种窗函数产生的频域肩峰不同，因而表中对它们的过渡带宽度定义也不一致。前文已述，过渡带的范围选在略小于 $H_g(\omega)=1$ 和略大于 $H_g(\omega)=0$ 的两点之间，对矩形窗此偏移为 1.55 dB。对其他各种窗因肩峰已很小，此偏移值也更小。由于此项指标定义有较大灵活性，因而在各种参考书中此类表格数据可能不相同。然而，实践表明按表 10－10 数据设计引入的误差经反复修正可以得到满意的结果。

表 10－10 五种窗函数特性比较

窗函数	主瓣宽度 (2π/N)	最大旁瓣电平 (dB)	加权后相应滤波器指标	
			过渡带宽度(2π/N)	最大阻带起伏(dB)
矩形窗	2	－13	0.9	－21
三角窗	4	－27	2.1	－25
汉宁窗	4	－32	3.1	－44
汉明窗	4	－43	3.3	－53
布莱克曼窗	6	－58	5.5	－74

除上列五种窗函数外，还有其他按不同要求设计的窗函数。例如适应性较强且比较灵活的凯泽(Kaiser)窗就是其中一种，它的表达式为

$$w(n)=\frac{I_0\left[\beta\sqrt{1-\left(1-\frac{2n}{N-1}\right)^2}\right]}{I_0[\beta]} \quad 0\leqslant n\leqslant N-1 \qquad (10-123)$$

其中 $I_0(x)$ 是第一类修正零阶贝塞尔函数，其幂级数展开式为

$$I_0(x)=1+\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^m}{m!}\right]^2 \qquad (10-124)$$

这种窗函数是近似于给定旁瓣电平，使主瓣具有最大能量意义下的最佳窗函数。其中 β 是形状参数，用以调节主瓣宽度和旁瓣电平，一般 β 选为 $4<\beta<9$ 之间，此时旁瓣电平约在 －30 dB 和 －67 dB 之间。给定要求的过渡带宽度 $\Delta\omega$ 和阻带衰减 $A=-20\lg\delta_2$ dB，要求的滤波器阶数 N 和形状参数 β 可由下列近似公式求出：

$$\begin{cases} N=\dfrac{A-7.95}{2.286\Delta\omega} \\ \beta=\begin{cases} 0.1102(A-8.7) & A\geqslant 50\text{ dB} \\ 0.5842(A-21)^{0.4}+0.07886(A-21) & 21\text{ dB}<A<50\text{ dB} \\ 0 & A\leqslant 21\text{ dB} \end{cases} \end{cases}$$

(10－125)

用窗函数法设计 FIR 滤波器的步骤：

(1) 给定 $H_d(e^{j\omega})$，求出相应的 $h_d(n)$；

(2) 根据允许的过渡带宽度及阻带衰减要求选择窗函数形状及滤波器长度 N；

(3) 按所得窗函数求得 $h(n)=h_d(n)w(n)$；

(4) 计算 $H(e^{j\omega})=\frac{1}{2\pi}[H_d(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega})]$，检验各项指标。

有时给出的 $H_d(e^{j\omega})$比较复杂，难以用式(10－108)计算出 $h_d(n)$，这种情况可以对 $H_d(e^{j\omega})$进行频域抽样，$H_d(k)=H_d(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{2\pi}{M}k}$，用 IDFT 计算出 $h'_d(n)$

$$h'_d(n)=\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}H_d(k)e^{j\frac{2\pi}{M}kn} \tag{10-126}$$

由 DFT 性质知，$h'_d(n)$与 $h_d(n)$关系为

$$h'_d(n)=\sum_{r=-\infty}^{\infty}h_d(n+rM) \tag{10-127}$$

因此当 M 足够大时，混叠影响不大，因而有 $h'_d(n)\approx h_d(n)$。

窗函数法设计简单实用，但缺点是过渡带及边界频率不易控制，通常需要反复计算。

例 10－15 用窗函数法设计一线性相位数字低通滤波器。给定技术指标：

通带允许起伏	－1 dB	$0\leqslant\omega\leqslant0.3\pi$	$(\omega_p=0.3\pi)$
阻带衰减	$\leqslant -50$ dB	$0.5\pi\leqslant\omega\leqslant\pi$	$(\omega_s=0.5\pi)$

解 用窗函数法设计，边界频率不易准确控制，近似取理想低通滤波器的截止频率为

$$\omega_c\approx\frac{1}{2}(\omega_p+\omega_s)=\frac{1}{2}(0.3\pi+0.5\pi)=0.4\pi$$

(1) 按式(10－113)求得

$$h_d(n)=\frac{\sin[0.4\pi(n-\alpha)]}{\pi(n-\alpha)}$$

(2) 确定窗函数形状及滤波器长度 N。

由于阻带衰减小于－50 dB，查表 10－10 选汉明窗，计算滤波器长度

$$N=3.3\times\frac{2\pi}{0.5\pi-0.3\pi}=33$$

$$\alpha=\frac{N-1}{2}=16$$

(3) 设计的滤波器单位样值响应。

$$h(n)=h_d(n)w(n)=\frac{\sin[0.4\pi(n-16)]}{\pi(n-16)}\left[0.54-0.46\cos\left(\frac{n\pi}{16}\right)\right]$$

(4) 求出设计的滤波器对数幅频特性如图 10－47 所示,满足原指标要求。

在 FIR 滤波器设计方法中,除了窗函数法之外还有一些方法,如频率抽样法,通、阻带最佳一致逼近的等波纹设计法等,限于本书篇幅不再讨论。

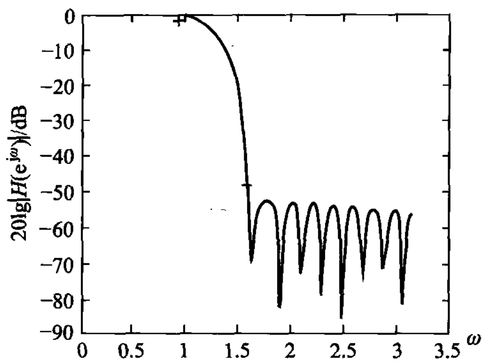


图 10－47　$N=33$ 汉明窗加权低通滤波特性

FIR 滤波器的实现比较简单,由于 $H(z)$ 是一个 z^{-1} 的多项式,它不存在分母多项式,结构框图中没有反馈部分,所以这种实现称为非递归结构。

根据式(10－91)实现的结构如图 10－48 所示,这种结构称为 FIR 滤波器的直接型结构,它直接实现下列差分方程运算:

$$y(n)=\sum_{m=0}^{N-1}h(m)x(n-m)=h(n)*x(n) \qquad (10-128)$$

因此又名卷积型结构或横向滤波器结构。所需乘法次数是 N,加法次数是 $(N-1)$。

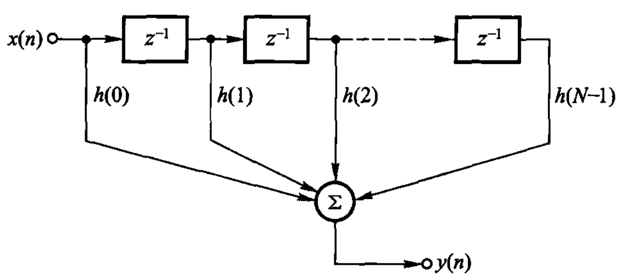


图 10－48　FIR 滤波器的直接型实现

如果 FIR 滤波器具有线性相位特性,则按式(10－94)利用 $h(n)$ 的对称性可以画出如图 10－49 所示的结构,它比图 10－48 所示直接型可节省一半乘法

次数,这种实现结构称为线性相位直接型结构。

与 IIR 滤波器相同,当 FIR 滤波器需要准确实现零点时,对 $H(z)$作因式分解,还可以有级联型实现。

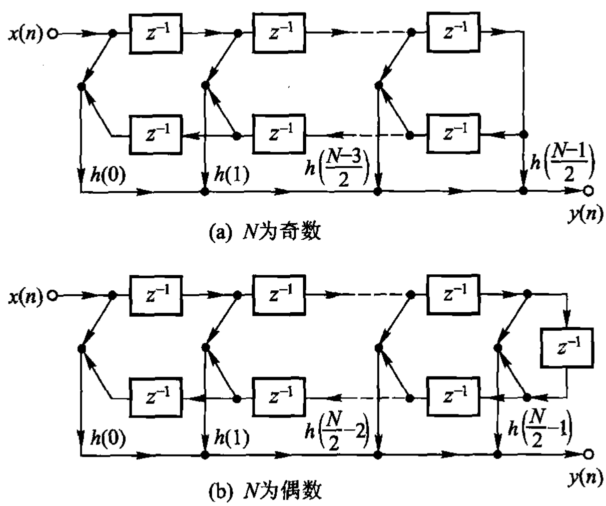


图 10-49 线性相位直接型结构

IIR 和 FIR 滤波器在数字信号处理领域中都占有重要地位。IIR 滤波器是用两个多项式之比的有理分式来逼近频率特性,可用较少阶数得到很好的选频特性,但这是用相位特性的非线性作为代价的;IIR 滤波器可借助模拟滤波器进行设计,有闭合函数设计公式可循,有大量设计图表可以利用,因而计算准确,给设计带来方便,但对于特殊滤波特性或逼近某种特定相位特性的滤波器,只能通过计算机用算法设计法做;另外从实现来看,IIR 滤波器用递归结构,反馈支路的存在使系统对稳定性要求高,有限字长效应影响大,设计不当会引起振荡。对 FIR 滤波器,它是用 z^{-1}的多项式来逼近要求的频率特性,没有可控制的极点,因此要达到与 IIR 滤波器相当的选频特性,需要的阶数很高,导致信号通过系统延时增加,使用的存储单元多,成本也相应提高,但是能做到严格的线性相移;从设计手段上,FIR 滤波器没有闭合形式设计公式,难以控制通带、阻带及边缘频率的准确性,设计时需要反复计算,然而,由于 $h(n)$为有限长序列,可借助 FFT 进行快速卷积运算,求得滤波器响应,反复计算并未引起很大麻烦;FIR 滤波器采用非递归结构,因此系统始终是稳定的,而且有限字长影响小,容易设计成满足特殊频率特性形状要求的滤波器。从上面的比较可以看出两者各有所长,在实际使用场合需要根据被处理信号的要求作出选择,对相位要求不敏感的场合(如语音通信等),可选 IIR 滤波器,而对波形上携带信息的传输系统(如图像信

号处理、数据传输等)，对系统相位特性要求较高，可考虑用 FIR 滤波器。

近年来，各种信号处理应用软件发展迅速，它们为数字滤波器设计者提供了许多方便，例如用 MATLAB软件或SPW(信号处理系统)软件都可直接按用户所需技术指标参数求得滤波器的频响、冲激响应或作零、极点分析。在利用这些软件时，以上几节介绍的计算工作可全部或大部分由计算机协助自动完成。

随着微电子技术的发展，数字信号处理技术向高速、实时方向迈进了一大步。为数字滤波器的实现已制成专用数字信号处理器(DSP)芯片。目前，通用可编程 DSP 已具有多总线、片内流水线操作、设置专用乘法累加器及特殊操作指令等特点，可以加快数据交换和乘法累加(MAC)的操作速度。如美国 TI 公司推出的 TMS320C6X 系列 DSP 芯片，具有 2 000 MIPS(每秒执行 2×10^9 条指令)速度，用来做 8 阶 IIR 滤波器仅需 0.15 μs，做长度为 $N=24$，数据点为 64 的 FIR 滤波也只要 3.9 μs。这种芯片的成本正在下降，应用范围将日益扩大。

10.8　*RC* 有源滤波器

本节讨论模拟滤波器的问题。在工作频率较低的情况下，无源 LC 滤波器表现出明显的缺点，这时，电感元件体积、重量较大，而且电感 Q 值下降。为解决这一矛盾，从 20 世纪 50 年代起，人们致力于研究 *RC* 有源滤波器，此后它在低频场合得到广泛应用。近年来，随着大规模集成电路技术的发展，又出现了适用于低频段的新型滤波器(如下节将要介绍的开关电容滤波器)，使 *RC* 有源滤波器的应用范围有所减少。本节只对 *RC* 有源滤波器的原理作简要介绍。

RC 有源滤波器包含电阻、电容、运算放大器以及由此导出的电压控制电压源(VCVS)、回转器、积分器、比例放大器和加法器等无电感电路。其中常用的 VCVS 电路如图 10-50(a)和(b)所示。图(a)所示电路是正增益 VCVS，它的增益为

$$K=\frac{V_2}{V_1}=1+\frac{R_2}{R_1} \tag{10-129}$$

当 $R_2=0, R_1=\infty$ 时，$K=1$，即为电压跟随器。图(b)所示电路是负增益 VCVS，这是常用的比例放大器，它的增益为

$$K=\frac{V_2}{V_1}=-\frac{R_2}{R_1} \tag{10-130}$$

和无源滤波器的实现一样，有源滤波器的实现，就是综合下列系统函数

$$H_a(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0} \tag{10-131}$$

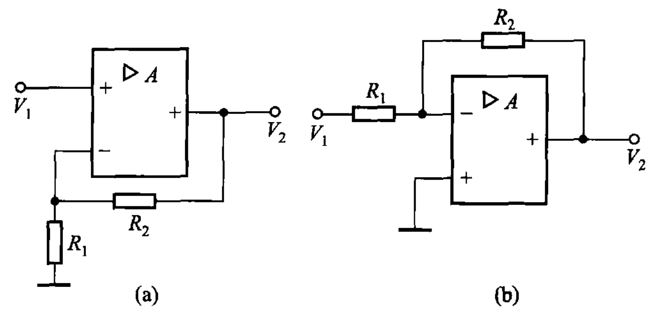


图 10－50　VCVS 电路

当 $m\leqslant n$ 时，$H_a(s)$也可以表示为乘积形式

$$H_a(s)=H_1(s)H_2(s)\cdots H_K(s) \tag{10-132}$$

其中 $K\leqslant N$，对于每一个 $j=1,2,\cdots,K$，子系统 $H_j(s)$可以是二阶节

$$H_j(s)=\frac{b_{j2}s^2+b_{j1}s+b_{j0}}{s^2+a_{j1}s+a_{j0}} \tag{10-133}$$

或是一阶节

$$H_j(s)=\frac{b_{j1}s+b_{j0}}{s+a_{j0}} \tag{10-134}$$

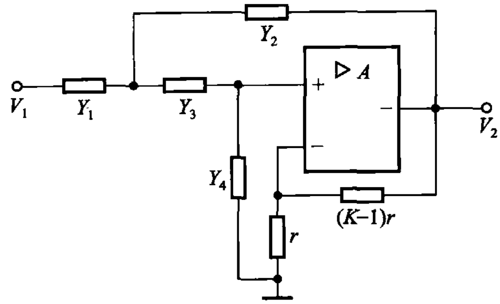
二阶子系统式(10－133)通常称为双二阶节，因其分子、分母都是 s 的二次多项式。

RC 有源滤波器利用放大器的反馈，可以使 $H_a(s)$产生共轭极点，不仅可以靠近虚轴 $\mathrm{j}\Omega$，形成良好的选频特性，甚至可以移到虚轴上形成振荡，而无源 RC 电路的极点只可能在负实轴上。

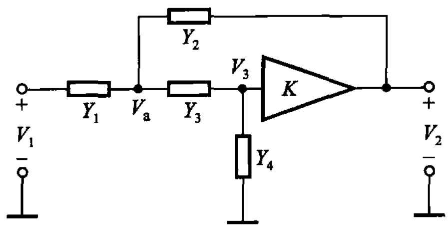
RC 有源滤波器有多种实现方法。一种是直接法实现，它是把式(10－131)的 $H_a(s)$完整地一步综合得到，另一种实现方法是级联实现法，它是把$H_a(s)$分解成式(10－132)的乘积形式，每一分解因子由如式(10－133)或式(10－134)的子系统组成。这里只介绍级联实现法。

1955 年首先由萨林(R.P.Sallen)和基(E.L.Key)提出用单级正反馈电路实现具有不同滤波特性的双二阶电路，因此这种实现称为萨林－基实现。它由 RC 梯形电路与有源 VCVS 共同组成，其一般结构如图 10－51(a)所示，其中 Y_1，Y_2，Y_3，Y_4 是电阻或电容，r 和$(K-1)r$ 用以调节所需的增益 K，图 10－51(b)是其等效电路。

对图 10－51(b)列电路的结点方程



(a)



(b)

图 10－51 双二阶单级正反馈电路实现及其等效电路

$$\begin{cases} V_a(Y_1+Y_2+Y_3)-Y_1V_1-Y_2V_2-Y_3V_3=0 \\ V_3(Y_3+Y_4)-Y_3V_a=0 \\ V_2=KV_3 \end{cases}$$

解得

$$H_a(s)=\frac{V_2}{V_1}=\frac{KY_1Y_3}{Y_4(Y_1+Y_2+Y_3)+Y_3(Y_1+Y_2)-KY_2Y_3} \tag{10-135}$$

用 $R—C$ 元件代入 $Y_1—Y_4$,就可以构造出具有不同滤波特性的双二阶 $H_a(s)$。

例 10－16 用单级正反馈电路实现低通巴特沃思滤波器,要求截止角频率 $\Omega_c=2\pi\times10^4$ rad/s,归一化阻值为 $R=600\ \Omega$,系统直流增益为 2。

解 增益为 2 的低通原型二阶巴特沃思滤波器的系统函数

$$H_a(s')=\frac{2}{(s')^2+\sqrt{2}s'+1}$$

可以先实现一个归一化的双二阶单级正反馈电路,然后对频率和阻抗去归一化,即可得到具体电路。

取如图 10－52 所示的等效电路可实现低通滤波,代入:$Y_1=\frac{1}{R_1'}$, $Y_2=$

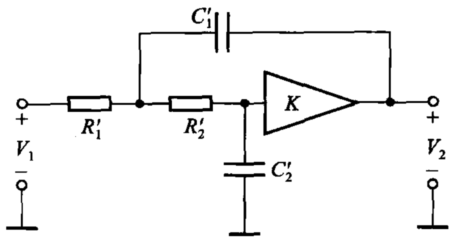


图 10－52 低通双二阶单级正反馈电路

$s'C_1'$，$Y_3=\frac{1}{R_2'}$，$Y_4=s'C_2'$，则

$$H_a(s')=\frac{\frac{K}{R_1'R_2'C_1'C_2'}}{(s')^2+s'\left[\frac{1}{R_1'C_1'}+\frac{1}{R_2'C_1'}+\frac{1}{R_2'C_2'}(1-K)\right]+\frac{1}{R_1'R_2'C_1'C_2'}}$$

按设计要求有

$$\begin{cases}\frac{1}{R_1'R_2'C_1'C_2'}=1\\ \frac{1}{R_1'C_1'}+\frac{1}{R_2'C_1'}+\frac{1}{R_2'C_2'}(1-K)=\sqrt{2}\end{cases}$$

由两个方程求解五个未知数，解不是惟一的。为此可以选 $R_1'=R_2'=1\ \Omega$，$C_1'=1\ \mathrm{F}$，则 $C_2'=1\ \mathrm{F}$，由此要求的

$$K=3-\sqrt{2}=1.586$$

为得到实际电路，电容和电阻对频率和阻抗去归一化有

$$C_1=C_2=\frac{1}{\Omega_c R}C_1'=\frac{1}{2\pi\times10^4\times600}\ \mathrm{F}=0.026\ 5\ \mu\mathrm{F}$$

$$R_1=R_2=R\cdot R_1'=600\ \Omega$$

用以调整增益的电阻 r 和 $(K-1)r$ 一般取值比较高，通常用几十千欧，设这里取 $r=50\ \mathrm{k}\Omega$，则 $(K-1)r=0.586\times50\ \mathrm{k}\Omega=29.3\ \mathrm{k}\Omega$。由于电路总增益要求是 2，所以还需增加一级放大器，其附加增益为：$\frac{2}{K}=\frac{2}{1.586}=1.261$，这级用正增益 VCVS 实现：$r=50\ \mathrm{k}\Omega$，$(K-1)r=0.261\times50\ \mathrm{k}\Omega=13.05\ \mathrm{k}\Omega$。最后实现电路如图 10－53 所示。

按式(10－131)给出的双二阶单级正反馈有源滤波一般表示式，萨林－基实现的滤波器还可构成高通、带通、带阻等双二阶电路。由于这种电路的输出是从运算放大器直接引出，因而输出阻抗很低，可以直接和其他电路级联，不需要隔

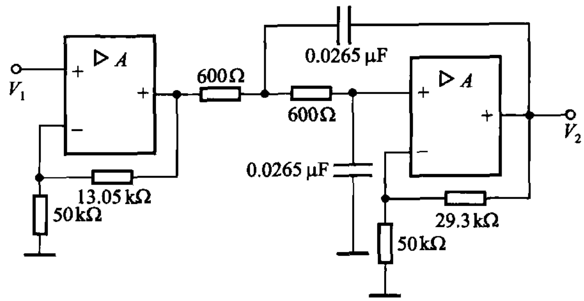


图 10－53 例 10－16 电路实现

离放大。这类实现的主要缺点是当带宽很窄或 Q 值较高时，电路性能对元件参数改变而引起的变化非常敏感。

10.9 开关电容滤波器(SCF)

长期以来，音频模拟滤波器的小型化始终是各种通信设备发展中难以解决的重要问题。前节已述，在此频段，LC 滤波器最不可取，RC 有源滤波器虽然使电路体积减小，然而，在灵敏度、稳定性和精度方面还不能令人满意。人们曾经考虑，对照 RC 有源滤波器的电路结构，将电阻、电容、运放集成于硅片之上，以进一步减小滤波器体积。然而，这种期望未能如愿，这是由于在硅片上制作电阻和电容元件时，参数精度和温度稳定性都较低，而且，电阻可能占用较大的硅片面积。因此，用单片实现 RC 有源滤波器的问题未能圆满解决。

MOS 开关电容滤波器(MOS Switched Capacitor Filter，简写作 MOS SCF)是一种适用于音频频段的模拟抽样信号处理网络，它由 MOS 电容、MOS 模拟开关以及 MOS 运算放大器组成。SCF 可以在面积不大的单块硅片上制作各种音频网络，准确性和温度稳定性都很高，便于廉价成批生产。早在 20 世纪 70 年代初，弗里德(Fried)已经提出开关电容滤波器的原理，但是由于具体实现的困难，未能及时得到广泛应用。70 年代末期，由于 MOS 工艺的进步，大规模集成模拟电路技术迅速发展，SCF 的研究与应用引起人们的巨大兴趣，于是，单片集成 SCF 得以实现，随之有 SCF 商品出售。目前，它已广泛应用于各种通信与电子设备之中。

SCF 成功应用的典型实例是 PCM 通信系统中的话路滤波器。在 PCM 通信系统中，语音信号进入 PCM 编码器之前，必须经过一个 300～3 400 Hz 的滤波器，滤除语音中的高频分量，以防止 8 kHz 抽样过程中可能出现的混叠现象，

这个滤波器也称为前置去混叠滤波器。PCM 解码器输出信号是阶梯波形，必须采用一个具有($x/\sin x$)补偿因子的 300～3 400 Hz 低通滤波器，才能恢复原语音信号(这里 $x=\pi f/8\,000$，f 是以 Hz 为单位的频率变量。参看第五章 5.9 节)。目前，利用开关电容技术制成的单片集成 PCM 话路滤波器品种很多，一般采用 CMOS 工艺，功耗在几十毫瓦以下。通过下面的原理介绍将要看到，在使用 SCF 单片电路时除需外接直流电源外，还需要接入时钟信号。

开关电容技术除用作滤波器之外，还可用来构成正弦波自激振荡器、压控振荡器、低功耗动态放大器等多种电子线路。

(一) 开关电容传递电荷原理

“开关电容”是在集成电路中用来替代电阻的一种基本电路单元。它的一种结构如图 10－54(a)所示(参看习题 7－24)。作为开关工作的 MOS 管 T_1 和 T_2 受时钟信号 ϕ 和 $\bar{\phi}$ 的控制，电容 C 交替地接通至 1－1′和 2－2′端子，等效电路如图 10－54(b)所示。时钟 ϕ 与 $\bar{\phi}$ 反相，当 ϕ 为高电平时，T_1 导通、T_2 截止，C

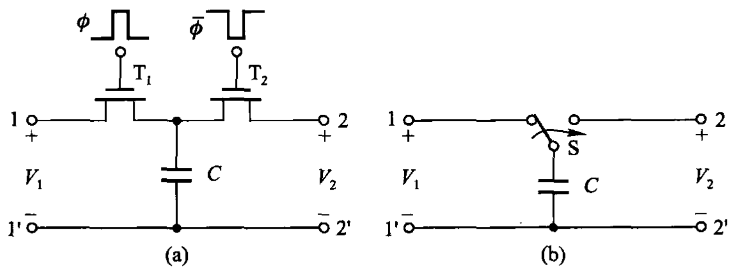


图 10－54 开关电容电路基本单元

接至 1－1′端，得到充电电荷 $Q_1=CV_1$。在 $\bar{\phi}$ 为高电平时，C 接至 2－2′端，电容两端电荷改变为 $Q_2=CV_2$。因此在时钟周期 T_c 内，从 1－1′端向 2－2′端传输的电荷量为

$$\Delta Q=Q_1-Q_2=C(V_1-V_2) \qquad (10-136)$$

由 1－1′端流向 2－2′端的平均电流为

$$I=\frac{\Delta Q}{T_c}=\frac{C}{T_c}(V_1-V_2) \qquad (10-137)$$

如果，时钟频率 $f_c=1/T_c$ 比传输信号的工作频率高很多，那么，上述开关电容相当于在 1－2 端之间的一个电阻 R，此等效电阻值为

$$R=\frac{V_1-V_2}{I}=\frac{T_c}{C}=\frac{1}{f_cC} \qquad (10-138)$$

式(10－138)表明，等效电阻值与时钟频率 f_c 和电容 C 成反比。

下面举例说明利用开关电容构成滤波器的基本原理。

图 10－55(a)示出一个 RC 低通滤波器，可以用图 10－54(a)所示的开关电容电路替换 R，如图 10－55(b)所示。

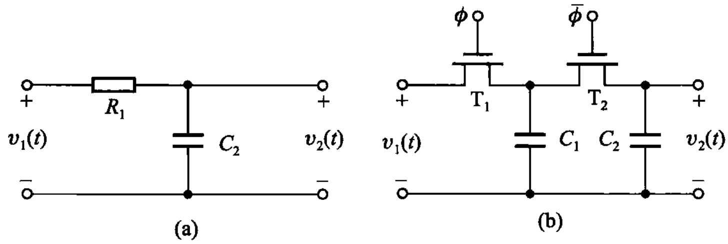


图 10－55　简单的开关电容滤波器

这时，电路的时间常数 τ 将由下式决定

$$\tau = RC = \frac{1}{f_c}\frac{C_2}{C_1} \tag{10-139}$$

式(10－139)表明，只利用 MOS 开关与电容即可构成简单的滤波器，不需要制作电阻，此外，网络的频率响应特性(取决于时间常数)由时钟频率与电容比值决定，与电容的绝对数值无关。以上两点结论具有重要的实际意义，避免制作电阻有利于减小芯片面积，而时钟频率(通常由石英晶体振荡器控制)和电容比值(注意是比值而不是绝对数值)容易保证足够的精度和稳定性。因此，开关电容概念的提出为实现高性能的音频单片集成滤波器找到了理想的途径。

从以上分析可以看出，开关电容网络是一个抽样数据系统。下面借助差分方程分析图 10－55 所示电路。

设抽样间隔(时钟周期)为 T_c，当 $t = nT_c$ 时，ϕ 相时钟控制 T_1 管导通，$\bar{\phi}$ 相时钟控制 T_2 管断开。此时，C_1 端电荷量为 $Q_1 = C_1 v_1(n)$，C_2 端电荷量为 $Q_2 = C_2 v_2(n)$，当 $t = nT_c + \frac{T_c}{2}$ 时，T_1 断开、T_2 导通，如此周期重复。设在 $t = (n+1)T_c$ 时输出端电荷量为 $(C_1 + C_2)v_2(n+1)$，不难列写电荷平衡方程式

$$(C_1 + C_2)v_2(n+1) = C_1 v_1(n) + C_2 v_2(n) \tag{10-140}$$

设激励信号 $v_1(t)$ 为单位阶跃，或令 $v_1(n)$ 为单位阶跃序列，对式(10－140)取 z 变换得到

$$(C_1 + C_2)V_2(z) - C_2 V_2(z)z^{-1} = C_1 V_1(z)z^{-1} \tag{10-141}$$

$$V_2(z) = \frac{C_1 z}{(z-1)[z(C_1 + C_2) - C_2]} = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - \dfrac{C_2}{C_1 + C_2}} \tag{10-142}$$

求逆 z 变换得到

$$v_2(n)=\left[1-\left(\frac{C_2}{C_1+C_2}\right)^n\right]u(n) \tag{10-143}$$

也即，当 $nT-\frac{T}{2}\leqslant t\leqslant nT+\frac{T}{2}$ 时

$$v_2(t)=1-\left(\frac{C_2}{C_1+C_2}\right)^n \tag{10-144}$$

画出阶跃响应波形如图 10－56 所示。

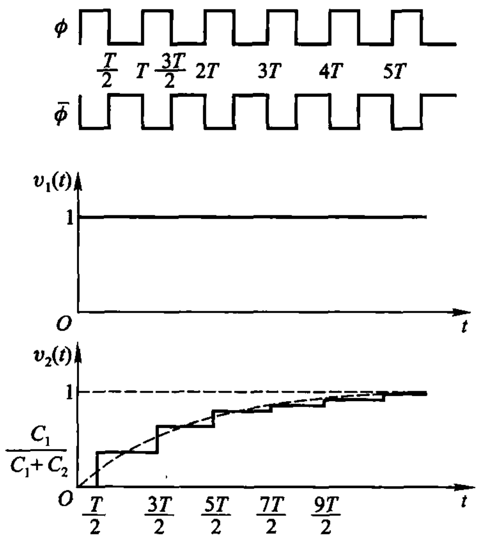


图 10－56 图 10－55 电路的波形

(二) 开关电容积分器

开关电容积分器是构成开关电容滤波器的基本单元。开关电容积分器和一般的连续时间积分器电路分别如图 10－57(a)和(b)所示。在图 10－57(a)中，时钟 ϕ 和 $\bar{\phi}$ 的控制规律仍如前所述。图 10－58 示出时钟信号波形，这里，偶相脉

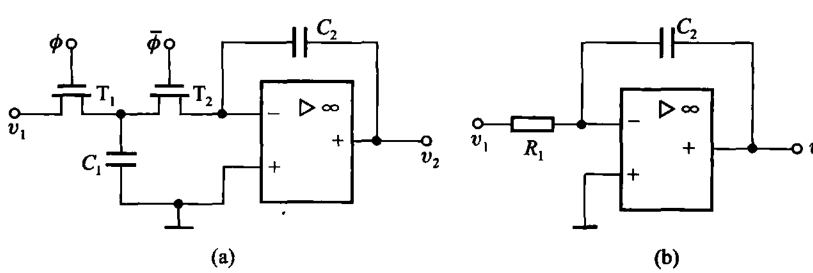


图 10－57 积分器电路

冲时隙(图中以符号 e 表示)MOS 开关 T_1 闭合，电容 C_1 对 $v_1(t)$ 抽样时刻发生在…，$(n-1)T_c, nT_c, (n+1)T_c$，…。奇相脉冲时隙(图中以符号 o 表示)开关 T_2 闭合。考虑到运放负极性输入端为虚地，因而电容 C_1 在前一时隙中储存的电荷将全部转移到 C_2 上，但极性相反，与电容 C_2 上原有电荷相叠加建立起 $v_2(t)$。如果 $v_2(t)$ 在偶相脉冲时隙抽样输出，则根据电荷守恒关系可列出差分方程如下：

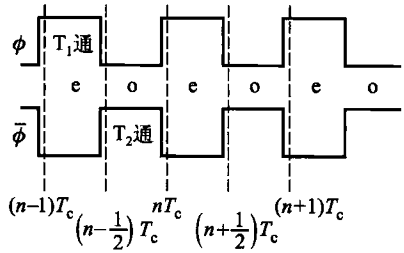


图 10－58　时钟信号波形

$$C_2 v_2(nT_c) = C_2 v_2[(n-1)T_c] - c_1 v_1[(n-1)T_c] \qquad (10-145)$$

式(10－145)中右边第一项为前次输出抽样时 C_2 上电荷保持值，第二项是 $\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)T_c\right]$ 时刻从 C_1 转移而来的电荷，二者之代数和构成 nT_c 时刻 C_2 之总电荷。

若 $v_2(t)$ 在奇相脉冲时隙即…，$\left(n-\frac{1}{2}\right)T_c, \left(n+\frac{1}{2}\right)T_c$，…抽样输出，则差分方程式为

$$C_2 v_2\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)T_c\right] = C_2 v_2\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)T_c\right] - C_1 v_1(nT_c) \qquad (10-146)$$

对式(10－145)与式(10－146)分别取 z 变换，可求得奇、偶时隙抽样输出的转移函数。

$$C_2 V_2(z) = C_2 V_2(z) z^{-1} - C_1 V_1(z) z^{-1} \qquad (10-147)$$

$$\frac{V_2^e(z)}{V_1^e(z)} = -\frac{C_1}{C_2}\cdot\frac{1}{z-1} \qquad (10-148)$$

和

$$C_2 V_2(z) Z^{\frac{1}{2}} = C_2 V_2(z) Z^{-\frac{1}{2}} - C_1 V_1(z) \qquad (10-149)$$

$$\frac{V_2^o(z)}{V_1^e(z)} = -\frac{C_1}{C_2}\cdot\frac{Z^{\frac{1}{2}}}{Z-1} \qquad (10-150)$$

式(10－148)与式(10－150)中上标“o”标明奇时隙、“e”标明偶时隙，也即两式分别表示偶入偶出和偶入奇出条件下的转移函数。

令 $Z = e^{j\Omega T_c}$，求频响特性

$$\frac{V_2^e(j\Omega)}{V_1^e(j\Omega)} = -\frac{C_1}{C_2}\cdot\frac{1}{e^{j\Omega T_c}-1}$$

$$= -\frac{1}{\mathrm{j}\Omega\dfrac{C_2}{f_cC_1}}\cdot\frac{\dfrac{\Omega T_c}{2}}{\sin\left(\dfrac{\Omega T_c}{2}\right)}e^{-\mathrm{j}\frac{\Omega T_c}{2}} \tag{10-151}$$

式中 $f_c=1/T_c$。此式右侧第一项与图 10-57(b)所示的连续积分器频域转移函数相同,积分时间常数为(C_2/f_cC_1);第二项,当 $\Omega T_c\to 0$(也即 $\Omega\ll\Omega_c$)时趋向于 1。即式(10-151)给出的转移函数当 $f\ll f_c$ 时,近似等于连续积分器的转移函数。此外,式中还存在线性相移项 $e^{-\mathrm{j}\Omega T_c/2}$。

对于偶入奇出条件得到

$$\frac{V_2^{\mathrm{o}}(\mathrm{j}\Omega)}{V_1^{\mathrm{e}}(\mathrm{j}\Omega)} = -\frac{1}{\mathrm{j}\Omega\dfrac{C_2}{f_cC_1}}\frac{\dfrac{\Omega T_c}{2}}{\sin\left(\dfrac{\Omega T_c}{2}\right)} \tag{10-152}$$

式(10-152)中已不存在线性相移项。可见,为消除开关电容积分器中附加的线性相移之影响,宜选用偶时隙抽样输入、奇时隙抽样输出的时序关系。

在滤波器的实际电路中,还经常用到有损积分器(有反馈电阻的积分器)。图 10-59(a)和(b)分别示出开关电容有损积分电路和一般的连续时间有损积分电路,二者的结构相互对应。为简化图形,这里将 MOS 开关管以单刀双掷开关表示。图 10-59(a)中的开关电容 S_1、C_0 和 S_2、C_2 分别取代了图 10-59(b)中的电阻 R_1 和 R_2。当输入和输出信号都在偶时隙抽样时,满足电荷守恒关系的差分方程表达式为

$$C_1v_o(nT_c) = C_1v_o[(n-1)T_c] - C_0v_i[(n-1)T_c] - C_2v_o[(n-1)T_c] \tag{10-153}$$

式(10-153)中,右端第一项为前次输出抽样保持值,第二项是在$\left(n-\frac{1}{2}\right)T_c$ 时刻从 C_0 转移到 C_1 上的全部电荷,第三项是从 C_2 转移到 C_1 上的全部电荷,三者代数和即为 nT_c 时刻 C_1 上的总电荷。对式(10-153)取 z 变换得到

$$C_1V_o(z) = C_1V_o(z)z^{-1} - C_0V_i(z)z^{-1} - C_2V_o(z)z^{-1} \tag{10-154}$$

由此求得转移函数

$$\frac{V_o(z)}{V_i(z)} = -\frac{C_0}{C_2}\left[\frac{1}{1+\dfrac{C_1}{C_2}(z-1)}\right] \tag{10-155}$$

令 $z=e^{\mathrm{j}\Omega T_c}$,代入求频响特性

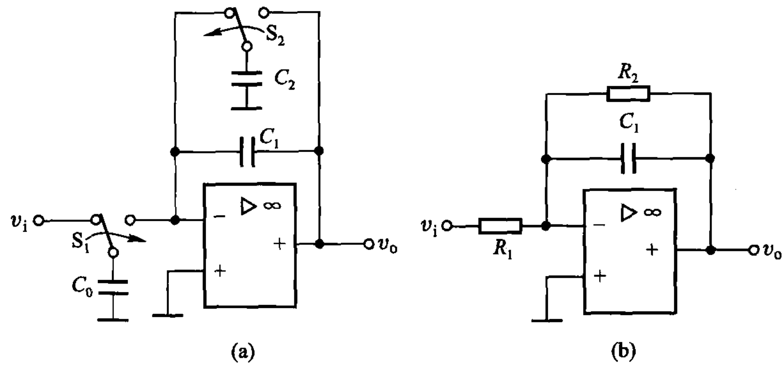


图 10 - 59　有损积分器电路

$$\frac{V_o(j\Omega)}{V_i(j\Omega)}=-\frac{C_0}{C_2}\left[\frac{1}{1+j\cdot\frac{\Omega C_1}{C_2f_c}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\Omega T_c}{2}\right)}{\frac{\Omega T_c}{2}}e^{j\frac{\Omega T_c}{2}}}\right] \tag{10-156}$$

当 $f_c \gg f$(即 $\Omega_c \gg \Omega$)时,式(10 - 156)近似表达式为

$$\frac{V_o(j\Omega)}{V_i(j\Omega)}=-\frac{C_0}{C_2}\cdot\frac{1}{(1+j\Omega C_1/f_cC_2)} \tag{10-157}$$

而相应的图 10 - 59(b)所示电路转移函数是

$$\frac{V_o(j\Omega)}{V_i(j\Omega)}=-\frac{R_2}{R_1}\cdot\frac{1}{(1+j\Omega R_2C_1)} \tag{10-158}$$

在开关电容滤波器中,另一种常用的基本单元是差动积分电路,如图 10 - 60(a)所示。在此电路中,用两组开关 S_1、S_2 与电容 C_0 取代了图 10 - 60(b)所示电路输入端的两只电阻和一个电容。在运放反相输入端的静电荷量正比于输入差动电压。它们的转移函数表达式可分别由以下两式求出

$$V_o=-\frac{f_cC_0}{j\Omega C_1}(V_1-V_2) \tag{10-159}$$

$$V_o=-\frac{1}{j\Omega RC_1}(V_1-V_2) \tag{10-160}$$

(三) 由无源模拟滤波器原型构成 SCF

开关电容滤波器的设计方法有许多种,其中大多需要利用连续时间滤波器作为原型,经转换构成 SCF。限于本书篇幅,这里只介绍一种所谓"状态变量设计法"(也称为模拟框图等效法),它的构成要点如下:

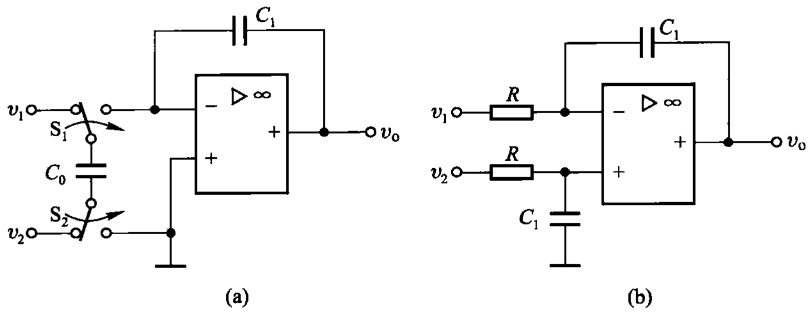


图 10-60 差动积分器电路

(1) 利用 KVL、KCL 列写无源 LC 滤波器的电路方程式,式中只包含求和、比例和积分运算。

(2) 由于在开关电容滤波器中,运放是作为 VCVS 形式的受控源工作,因而,在上述电路方程式中的电流必须由某一比例电阻 R_s 倍乘,转换为相应的电压。比例电阻 R_s 的选取原则将在下面讨论。

(3) 由电路基本方程式画出以积分、求和运算构成的模拟等效框图(也称状态变量图)。

(4) 由模拟等效框图转换为开关电容滤波器电路结构。基本单元仍然是积分、比例、求和功能块。

(5) 由无源滤波器的 R,L,C 值以及时钟频率 f_c 和比例电阻 R_s 计算开关电容滤波器的电容比。

图 10-61 示出一个无源 R,L,C 二阶低通滤波器电路,试由此导出相应的开关电容滤波器。

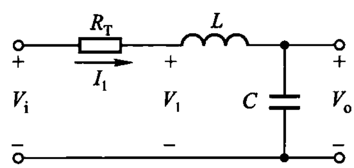


图 10-61 无源低通原型电路

此电路的转移函数表达式为

$$\frac{V_o}{V_i}=H(s)=\frac{\dfrac{1}{LC}}{s^2+s\dfrac{R_T}{L}+\dfrac{1}{LC}} \tag{10-161}$$

由图 10-61 列写电路方程式如下:

$$V_1=V_i-R_TI_1$$

$$I_1=\frac{1}{sL}(V_1-V_o)$$

$$V_o=\frac{1}{sC}I_1$$

为将电流变量 I_1 转换为电压变量 V'_1，引入比例电阻 R_s，取 $I_1=\frac{V'_1}{R_s}$，于是得到

$$V_1=V_i-\frac{R_T}{R_s}V'_1 \tag{10-162}$$

$$V'_1=\frac{R_s}{sL}(V_1-V_o) \tag{10-163}$$

$$V_o=\frac{1}{sCR_s}V'_1 \tag{10-164}$$

利用这组方程画出模拟等效方框图如图 10－62 所示。图中，只包含积分、比例、求和运算功能，积分器Ⅱ是简单的反向积分器，而积分器Ⅰ是含有电阻反馈的有损差动积分器。将图 10－62 转换为相应的开关电容积分器如图10－63 所示。

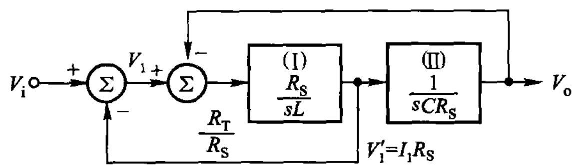


图 10－62 模拟等效框图

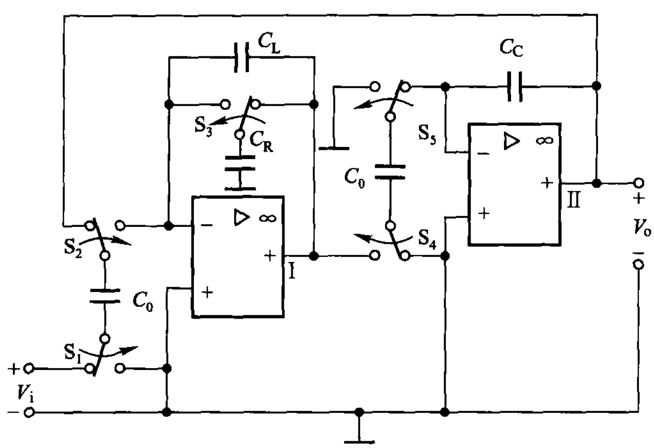


图 10－63 与图 10－62 相对应的 SCF 电路

对照以上两图中积分器Ⅰ与积分器Ⅱ的积分时间常数，列出以下关系式：

$$\frac{L}{R_s}=\frac{C_L}{f_c C_0} \tag{10-165}$$

$$CR_s=\frac{C_C}{f_c C_0} \tag{10-166}$$

令两图中积分器Ⅰ反馈支路相乘系数相等得到

$$\frac{R_T}{R_s}=\frac{C_R}{C_0} \tag{10-167}$$

在以上各参量中,R_T,L,C 由模拟滤波器原型给定(图 10-61),f_c 是时钟频率,R_s 为任选常数,待设计参量是 C_L、C_C、C_0、C_R。在选择 R_s 时,如果考虑尽量减小电容所占芯片面积,取两组电容比相等

$$\frac{C_L}{C_0}=\frac{C_C}{C_0} \tag{10-168}$$

于是由式(10-165)和式(10-166)得到

$$R_s=\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{10-169}$$

在习题 10-30 中给出了按上述原则设计 SCF 参数的数字实例。这里,只介绍了利用状态变量法构成二阶 SCF 电路的原理,在实际的 SCF 芯片中,大多是高阶电路,其构成原理与二阶电路大体相同。

除上面介绍的状态变量法之外,在 SCF 电路设计方面还有许多方法,例如,从 s 域映射到 z 域的双线性变换法也是一种较为普遍的方法。此外,在设计过程中往往需要借助电路 CAD(计算机辅助设计)技术,详见有关参考书和文献①。

在实际的 SCF 芯片电路中,为保证抽样过程及其恢复的顺利进行,选择时钟信号(抽样信号)频率 f_c 远大于传输信号频率,例如,对于 PCM 话路滤波器(工作频率为 300~3 400 Hz),f_c 通常选 256 kHz。此外,为减少因抽样引入的混叠,在 SCF 之前还要接入抗混叠前置滤波器,滤除高于抽样频率之半的干扰信号。由于对它的精度、稳定性要求不高,可利用简单的 RC 有源滤波器实现。

在本章即将结束时,回顾这章的内容可概括示意于图 10-64。这张框图也表明了半个多世纪以来在通信与电子系统领域滤波器理论和应用的主要发展历程。正实函数和逼近理论为各种滤波器的形成奠定了理论基础,二端口无源 LC 综合(达林顿理论)也是滤波器发展史上的里程碑。而早在 20 世纪 30 年代形成的影像参数法基本上已无人问津(本书未予讨论)。此外,利用各种固体器件直接制作的滤波器如石英晶体、陶瓷、面声波和电荷耦合器件(CCD)等滤波器

① 见参考书:郑君里,白应奎,龚明甫.通信系统大规模集成电路.北京:人民邮电出版社,1988。
文献:李松银,郑君里,李梅.改进 KNOB 法实用化 SCF 设计程序.电子学报,1993.2,Vol.21.No.2。

具有不同的物理原理、特色和各自的应用范围，限于篇幅，此处从略。关于各种滤波器比较的深入讨论请查阅参考书目[4]第 188 页 3.10－5 节。

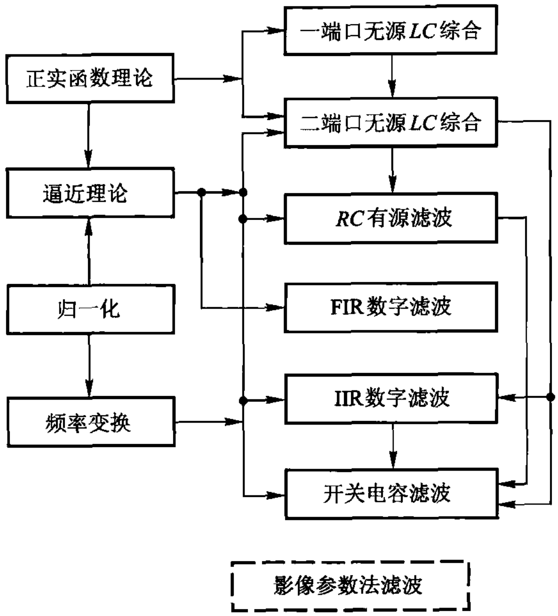


图 10－64　本章内容回顾

习　　题

10－1　研究两种典型逼近函数在滤波器阻带的衰减性能：

(1) 对巴特沃思滤波器，当 $\Omega \gg \Omega_c$ 时，证明其衰减速度为 $20N$ dB/dec(N 为阶数)；

(2) 对切比雪夫滤波器，重复(1) 所问。

(提示：利用 $\Omega \gg \Omega_c$ 之条件作近似简化求证；衰减速度为 $20N$ dB/dec 表示频率值从 Ω 增大到 $10\ \Omega$ 时，频响特性改变 $-20N$ dB，dec 表示 10 倍频。)

10－2　证明巴特沃思滤波器系统函数之极点表达式可以写作式(10－7)，也即从式(10－3)导出以下结论：

$$s_k = \Omega_c e^{j\left[\frac{(2k-1)\pi}{2N}+\frac{\pi}{2}\right]}$$

(其中，$k=1,2,3,\cdots,2N$，而 N 值可为奇或偶。)

10－3　设计满足下列技术指标的低通滤波器：

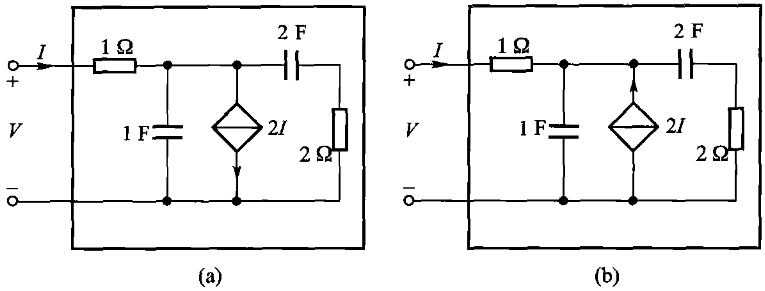
通带内允许起伏 －1 dB　$0 \leqslant f \leqslant 10$ kHz

阻带衰减 $\leqslant -20$ dB　20 kHz $\leqslant f < \infty$

(1) 以巴特沃思逼近函数构成，求阶数 N、－3 dB 点频率值 Ω_c 以及系统函数 $H_a(s)$；

(2) 以切比雪夫逼近函数构成，选定波纹参数 ε、求阶数 N 以及系统函数 $H_a(s)$。

10-4　题图 10-4 所示两个网络，哪个网络可以等效为一端口无源网络？



题图 10-4

10-5　(1) 为使 $F(s)=\dfrac{s+a}{s^2+bs+c}$ 是正实函数，确定 a,b,c 都应满足什么条件？

(2) 检验下列函数哪个是正实函数？

$$F_1(s)=\frac{s+2}{s^2+3s+2}\qquad F_2(s)=\frac{s+1}{s^2+2}\qquad F_3(s)=\frac{s+4}{s^2+3s+1}$$

10-6　判断函数的正实性：$F_1(s)=\dfrac{3s^2+5}{s(s^2+1)}$；$F_2(s)=\dfrac{s^2+s+2}{s^2+2}$。

10-7　本题证明 LC 无损一端口网络策动点阻抗函数 $Z(s)$ 或[导纳函数 $Y(s)$]的一些性质。

对一般多项式 $F(s)$，定义所有由 s 偶次方项构成的多项式称为 $F(s)$ 的偶部，记为 $F_e(s^2)$，所有由 s 奇次方项构成的多项式称为 $F(s)$ 的奇部，记为 $F_o(s)=sF_o^1(s^2)$，则 $F(s)=F_e(s^2)+F_o(s)$。

(1) 证明：若一端口 LC 网络是无损的，即 $\mathrm{Re}[Z(\mathrm{j}\Omega)]=0$，则 $Z(s)$ 一定是奇次多项式和偶次多项式的比值，即 $Z(s)$ 是 s 的奇函数。

(2) $Z(s)$[或 $Y(s)$]的零、极点只能是位于 $\mathrm{j}\Omega$ 轴上的单阶零点或极点，且 $Z(s)$ 在极点处的留数是正实数。

(3) $Z(s)$ 是 s 的奇函数，因而 $Z(\mathrm{j}\Omega)$ 是纯电抗（或电纳）且记为 $Z(\mathrm{j}\Omega)=\mathrm{j}X(\Omega)$，$X(\Omega)$ 是 Ω 的实函数，证明 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\Omega}X(\Omega)>0$，即电抗函数的斜率永远为正。

(4) $Z(s)$ 在 $\mathrm{j}\Omega$ 轴上的零、极点分布必须交替出现。

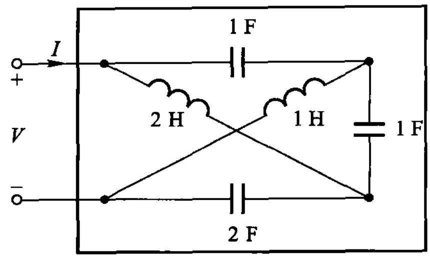
10-8　已知无损 LC 阻抗函数 $Z(s)=\dfrac{(s^2+1)(s^2+9)}{s(s^2+4)(s^2+16)}$，试分别用考尔Ⅰ型、Ⅱ型实现。

10-9　(1) 求题图 10-9 所示网络的策动点阻抗函数 $Z(s)$；

(2) 试分别用考尔Ⅰ型、Ⅱ型实现图示网络的 $Z(s)$。

10-10　福斯特型一端口无源网络综合方法是将给定的策动点阻抗或导纳函数用部分分式展开，例如，若 $Z(s)=\dfrac{s(s^2+2)}{(s^2+1)(s^2+3)}$，可展开为

$$Z(s)=\frac{\frac{1}{2}s}{s^2+1}+\frac{\frac{1}{2}s}{s^2+3}$$



题图 10 - 9

式中两项各对应一个并联谐振回路，画出实现它的等效电路图，图中注明 L,C 元件值。

10 - 11 已知系统函数 $$H_a(s)=\frac{k}{s^2+3s+1}$$

用两端端接电阻的无损二端口网络实现，信源内阻 $R_S=1\ \Omega$，分别求负载电阻为：(1) $R_L=1\ \Omega$；(2) $R_L=2\ \Omega$；(3) $R_L=0.5\ \Omega$ 时的三种电路实现。

10 - 12 已知系统函数 $H_a(s)=\dfrac{ks^2}{s^2+3s+1}$，用两端端接电阻的无损二端口网络实现，信源内阻 $R_S=1\ \Omega$，求负载电阻为 $R_L=1\ \Omega$ 时的电路实现。

10 - 13 继续完成习题 10 - 3 的设计工作。若给定信源内阻 R_S 与负载电阻 R_L 相等，$R_S=R_L=1\ \text{k}\Omega$，求

(1) 按巴特沃思逼近函数导出的 $H_a(s)$ 实现电路结构和参数计算；

(2) 按切比雪夫逼近函数导出的 $H_a(s)$ 实现电路结构和参数计算。

10 - 14 通带允许起伏为 1 dB 的切比雪夫滤波器：

(1) 求 $N=2$ 时低通原型滤波器系统函数 $H_{al}(s')$；

(2) 若归一化负载电阻为 $R'_L=R_L/R_S=0.25$，求低通原型电路实现，并说明实现电路时有何限制。

10 - 15 通带允许起伏为 3 dB 的切比雪夫滤波器：

(1) 求 $N=2$ 时低通原型滤波器系统函数 $H_{al}(s')$；

(2) 若归一化负载电阻为 $R'_L=0.15$，求低通原型电路实现。

10 - 16 设计并实现满足下列技术指标的巴特沃思高通滤波器：

通带允许起伏：-1 dB　　1MHz $\leqslant f<\infty$

阻带衰减：$\leqslant -20$ dB　　$0\leqslant f\leqslant 500$ kHz

信源内阻和负载电阻相等：$R_S=R_L=1\ \text{k}\Omega$

10 - 17 设计并实现满足下列技术指标的带通滤波器：

通带内要求具有等波纹起伏特性，允许起伏：

-1 dB　0.95 MHz $\leqslant f\leqslant 1.05$ MHz

阻带衰减：$\leqslant -40$ dB　　$0\leqslant f\leqslant 0.75$ MHz，1.25 MHz $\leqslant f<\infty$

信源内阻和负载电阻相等：$R_S = R_L = 150\ \Omega$

10－18 如图 10－2 所示模拟信号的数字处理系统，已知限带滤波器和平滑滤波器的截止角频率都为 $\frac{\pi}{T}$ rad/s，数字滤波器截止角频率为 $\frac{\pi}{8}$ rad，三者都为理想低通滤波器，问若(1) 抽样频率为 10 kHz；(2) 抽样频率为 20 kHz 两种情况下等效模拟滤波器带宽是多少？

10－19 用冲激不变法求相应的数字滤波器系统函数 $H(z)$。

(1) $H_a(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2}$

(2) $H_a(s) = \frac{s+1}{s^2+2s+4}$

10－20 试证明对 $H_a(s) = \frac{1}{s+a}(a>0)$ 和 $H_a(s) = \frac{s+a}{(s+a)^2+\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2}(a>0)$ 分别用冲激不变法变换成数字滤波器的系统函数 $H(z)$，两者具有相同的 $H(z)$；从物理概念上解释这一结果(其中 T 为抽样周期)。

10－21 (1) 用双线性变换法把 $H_a(s) = \frac{s}{s+a}(a>0)$ 变换成数字滤波器的系统函数 $H(z)$，并求数字滤波器的单位样值响应 $h(n)$(设 $T=2$)。

(2) 对(1) 中给出的 $H_a(s)$ 能否用冲激不变法转换成数字滤波器 $H(z)$？为什么？

10－22 要求通过模拟滤波器设计数字低通滤波器，给定指标：－3 dB 截止角频率 $\omega_c = \frac{\pi}{2}$，通带内 $\omega_p = 0.4\pi$ 处起伏不超过 －1 dB，阻带内 $\omega_s = 0.8\pi$ 处衰减不大于 －20 dB，用巴特沃思滤波特性实现：

(1) 用冲激不变法，最少需要多少阶？

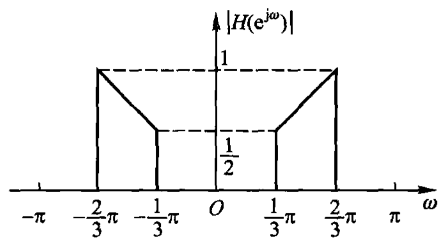
(2) 用双线性变换法，最少需要多少阶？

10－23 给定如题图 10－23 所示的数字滤波器频率特性：

(1) 用冲激不变法，试求原型模拟滤波器频率响应；

(2) 用双线性变换法得到，试求原型模拟滤波器频率响应。

(本题可以用图解法，画出原型模拟滤波器频率响应。)



题图 10－23

10－24 数字带通滤波器可以通过双线性变换用模拟带通滤波器进行设计。设已经求得相应的模拟低通原型滤波器 $H_{al}(s')$，则可以用模拟归一化复频率 s' 与 z 的映射关系 $s' = f(z)$ 直接得出要求的数字带通滤波器 $H(z)$。

(1) 证明：从模拟低通原型到数字带通滤波器，s' 与 z 的映射关系为

$$s' = A\,\frac{1-2Bz^{-1}+z^{-2}}{1-z^{-2}}$$

模拟低通原型归一化模拟角频率 Ω' 与数字带通滤波器的数字角频率 ω 间的关系为

$$\Omega' = A\frac{B-\cos\omega}{\sin\omega}$$

并求常数 A,B 与数字带通指标间的关系。

(2) 设计并实现数字巴特沃思型带通滤波器，给定技术指标为

-3 dB 通带范围：　$0.3\pi \leqslant \omega \leqslant 0.4\pi$

阻带衰减：　$\leqslant -15$ dB　$0\leqslant\omega\leqslant 0.2\pi, 0.5\pi\leqslant\omega\leqslant\pi$

求该滤波器的系统函数 $H(z)$，并画出实现的结构框图。

10-25　完整推导证明窗函数法设计准则式(10-110)和式(10-111)。

10-26　试求汉宁窗窗函数的傅里叶变换，并解释旁瓣电平降低的原因。

10-27　已知 FIR 滤波器的系统函数为

$$H(z)=\frac{1}{10}(1+2z^{-1}+4z^{-2}+2z^{-3}+z^{-4})$$

(1) 求 $H(e^{j\omega})$ 的表示式，粗略画出频域幅度特性；

(2) 画出乘法次数最少的结构框图表示。

10-28　用矩形加窗设计一线性相位带通 FIR 滤波器

$$H_d(e^{j\omega})=\begin{cases} e^{-j\omega\alpha} & -\omega_c\leqslant\omega-\omega_0\leqslant\omega_c \\ 0 & 0\leqslant\omega<\omega_0-\omega_c,\ \omega_0+\omega_c<\omega\leqslant\pi \end{cases}$$

(1) 计算 N 为奇数时的 $h(n)$；

(2) 计算 N 为偶数时的 $h(n)$。

10-29　用矩形窗设计一线性相位高通 FIR 滤波器

$$H_d(e^{j\omega})=\begin{cases} e^{-j\omega\alpha} & \pi-\omega_c\leqslant\omega\leqslant\pi \\ 0 & 0\leqslant\omega<\pi-\omega_c \end{cases}$$

(1) 计算 N 为奇数时的 $h(n)$；

(2) 计算 N 为偶数时的 $h(n)$。

10-30　利用图 10-61 所示的模拟低通滤波器为原型，设计一个如图 10-63 所示的二阶 SCF 电路。给定电路参数为 $L=0.112\,6$ H，$C=0.224\,7$ μF，$R_T=1$ kΩ，时钟频率 $f_c=100$kHz。

(1) 求三组电容比值 $\frac{C_C}{C_0},\frac{C_L}{C_0},\frac{C_R}{C_0}$；

(2) 试选 $C_0=1$ pF，求 C_C, C_L, C_R 值。

第十一章 反馈系统

11.1 引　　言

本书前九章的注意力侧重于讨论信号性能分析以及信号通过线性时不变系统的基本求解方法(包括时域和变换域方法),从第十章到第十二章转向系统性能分析或系统设计初步原理。虽然,信号与系统的概念密不可分,然而这种注意力的不同将使讨论的目标和内容有所差异。另一方面,前十章的应用举例大多以通信工程为背景,而第十一章和第十二两章的应用背景则着重控制工程。

系统分析的基本方法是建立它的数学模型(如微分方程或差分方程),然后按一些标准方法求解。然而在实际问题中只依赖这种办法往往使研究过程十分繁琐或不得要领。解决上述矛盾的方法之一是给出一些典型系统的模块及其响应特征,制成表格、手册或存放在数据库中备查,按实际问题的需要选择相应的模块,只要作简单的修改和计算即可付诸应用。第十章关于滤波器的讨论正是遵循这一原则进行的。另一类研究方法是将系统分解为若干基本单元,如果熟知各单元性能,将它们组合构成复杂系统时,分析过程将得以简化。这种方法曾在第一章 1.6 节和第七章 7.3 节给出初步概念,即利用基本的方框图组合建立系统模型。人类的认识过程往往需要中间体系作为媒介。求解一个庞大的问题所需计算量可能难以接受,而将此问题“拆”成若干简单问题然后相互连接起来就比较容易计算。而且前者难以给出物理概念,后一种作法容易理解性能特征的实质。系统分解与互联的研究方法也有助于从系统分析过渡到系统设计(综合)。

反馈系统的研究是利用分解与互联概念而获得成功的典型范例。首先考察连续时间信号与系统的反馈系统模型。在图 11-1 中,输入信号为 $X(s)$,输出信号为 $Y(s)$,正向通路的系统函数为 $A(s)$,反馈通路的系统函数为 $F(s)$,输入信号与反馈信号经加法器作相减运算得到 $E(s)$,有时称 $E(s)$ 为误差信号。按照上述要求写出以下约束方程式

$$Y(s) = E(s)A(s)$$

$$E(s) = X(s) - Y(s)F(s)$$

由此求得反馈系统的系统函数 $H(s)$ 为

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{A(s)}{1+F(s)A(s)} \tag{11-1}$$

第四章例 4－25 和例 4－26 曾建立与此类似的系统函数表达式。

注意到在图 11－1 中反馈信号与输入信号作相减运算，这种情况称为负反馈或非再生反馈。如果将二者作相加运算（即图 11－1 中加法器下面的符号改为正号），则称为正反馈或再生反馈。此时，式（11－1）中 $H(s)$ 表达式的分母项成为 $1-F(s)A(s)$。在本章的讨论中着重研究负反馈。

为了比较引入与不引入反馈系统性能的区别，有时将图 11－1 中的反馈通路断开，这时称为开环系统。与此对照，闭合反馈通路后则称为闭环系统。

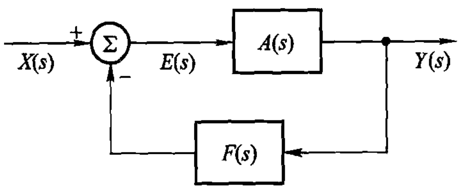


图 11－1　连续时间信号反馈系统模型

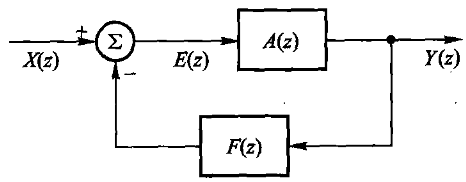


图 11－2　离散时间信号反馈系统模型

离散时间信号的反馈系统模型如图 11－2 所示。图中，$X(z)$为输入信号，$Y(z)$是输出信号，正向通路的系统函数为 $A(z)$，反馈通路系统函数是$F(z)$，输入信号与反馈信号相减得到 $E(z)$。仿照式（11－1）容易写出反馈系统的系统函数 $H(z)$表达式

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{A(z)}{1+F(z)A(z)} \tag{11-2}$$

由式（11－1）和式（11－2）可见，连续与离散反馈系统的数学模型具有相同的形式，以后的分析将要看到，它们的基本特性与应用也大体相同。

很久以前人们就意识到引用反馈可以获得许多益处，这是一种自然感觉的应用，它渗透在人们的日常生活和生产活动之中。很难说谁是反馈技术的发明者。近代反馈系统理论的形成大约是在 20 世纪 30 年代。美国贝尔电话实验室的布莱克（H.S.Black）及其合作者奈奎斯特（H.Nyquist）和波特（H.W.Bode）等人都曾为此理论的形成作出贡献。他们的工作主要是围绕改善电子线路放大器的性能而进行的。到 20 世纪 40 年代至 50 年代期间，反馈理论已经成为控制系统设计的一种基本方法而得到了更为广泛的应用。控制论的创始人维纳（N.Wiener）及其继承者把反馈视为控制论哲学体系的基础之一。反馈理论涉及与自动控制有关的一切事物，不仅限于工程技术，也包括社会系统与经济系统行为，以至人类或动物的生理过程与心理过程。

在模拟电子线路课程中已初步建立了反馈放大器的概念，利用反馈技术可使放大器的许多性能得到改善，下一节将从系统函数零、极点分布的观点进一步

讨论这类问题。

利用系统的输出去控制或调整系统自身的输入即可产生反馈效应。此时，提供了一个误差校正信号，它可以调节输出跟踪输入信号，从而削弱外界干扰或系统自身参数变动的影响。例如，在机电系统中，为了保持一台电机轴的位置处于某一恒定角度，可测量电机轴的实际位置与所要求位置之间的误差，然后利用此误差信号使轴在适当方向上调整。图 11－3(a)示意画出利用直流电机控制火炮位置系统的方框图。要使火炮能够命中目标，需要不断调整炮口位置跟踪目标，而目标的方位是任意改变的，无法预知。在图 11－3(a)所示反馈系统中，参考输入信号就是所需炮口位置的方位角 ϕ_0。用电位器 Ⅰ 把角度 ϕ_0 转换为电压 $A_1\phi_0$，而另一电位器 Ⅱ 用来产生正比于实际炮位角度 $\phi(t)$ 的电压 $A_1\phi(t)$。把这两个电压进行比较即可产生误差信号 $A_1[\phi_0-\phi(t)]$，经放大后驱动电机

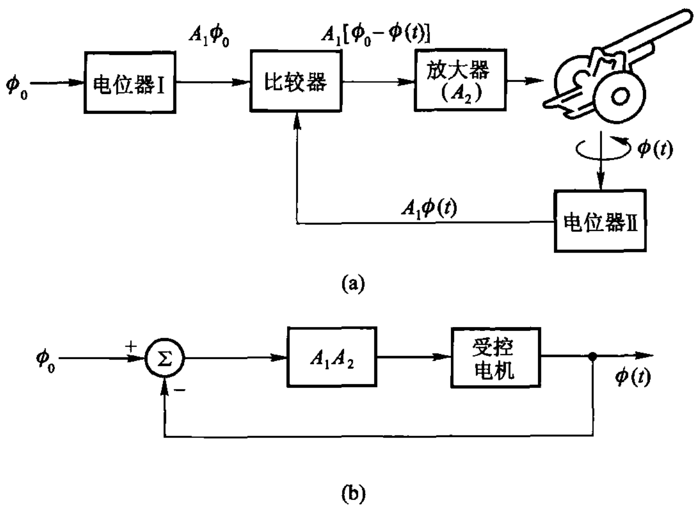


图 11－3 利用电机控制火炮位置的反馈系统

调整轴的角度。图 11－3(b)示出此系统的简化等效方框图。不难想象，若断开反馈，利用 ϕ_0 作输入直接控制电机轴的位置，仍有可能使火炮调整到所需方位。然而将闭环系统与开环系统相比较，前者显示明显的优点。在闭环系统中，当电机轴处于正确位置时，任何偏离此位置的扰动都会被感受到，由此产生误差信号进行校正，使轴回到正确位置。对于开环系统则不具备这种抵抗扰动的能力。此外，在开环系统中，为了设计适当的输入，必须知道整个系统的精确性能；而在闭环系统中，并不要求对整个系统参数有过细的了解。

在工业自动控制过程中可以看到许多与上述跟踪系统原理类似的反馈系统应用实例。在通信系统中，锁相环路和自动频率微调电路都是基于上述跟踪系

统原理设计而成。

反馈的另一重要特性是适当引入反馈后可使一个不稳定系统进入稳定状态。图 11-4 示出研究“倒立摆”控制的模型图。图中,倒立摆由一根细棍及其顶端的重物构成。细棍的底部安装在一个小车上,小车可沿轨道移动。如果小车保持静止不动,细棍和重物就会倒下来,这是一个不稳定系统。为使此系统稳定,可不断地移动小车位置以保证倒立摆平衡于垂直状态。习题 11-11 将详细研究这一问题。与此类似的一个工程实例是控制火箭轨道的问题。火箭在空中飞行时,由于空气动力的变化和风的扰动将使火箭偏离正确轨道。这些力的变化和扰动都是不可能事先确知的,为此需要借助反馈。利用火箭推力方向的变化来校正扰动引起的轨道偏离。

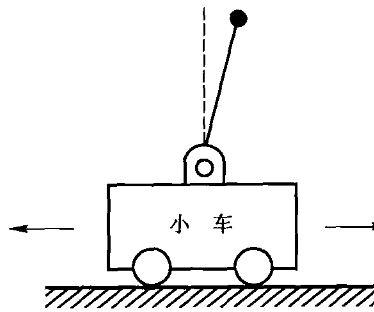


图 11-4 倒立摆控制模型

在生物和人类控制运动的过程中也存在反馈。例如,人们用手去拿某件物体时,要依靠视觉来判断手和物体之间的差距,逐步接近物体。这是一个闭环反馈系统。如果没有视觉反馈(闭上眼睛)构成一个开环系统,则此控制过程的效果将明显变坏。此外,杂技演员用手或头部顶起一根长杆,演员凭视觉判断长杆可能倒下的方位,不停地移动手或头的位置,使长杆稳定于垂直状态。这种杂技表演与图 11-4 讲述的倒立摆工作原理完全相同。

下一节将初步介绍负反馈系统特性、基本分析方法以及典型应用实例。而 11.3 节则从另一角度研究反馈技术的应用,简要说明借助正反馈产生自激振荡的原理。考虑到稳定性分析是研究、设计反馈系统的基本问题,在 11.4 节和 11.5 节给出这方面的基本知识,包括根轨迹和奈奎斯特判据。最后一节讲授信号流图,对于较复杂的线性反馈系统,利用信号流图方法可使分析工作大大简化。此外,掌握信号流图方法将为学习下一章系统状态空间分析打好基础。

必须指出,本章的内容只是关于反馈系统分析的引导介绍,全面、深入的研究将在控制理论等课程中学习。

11.2 反馈系统的基本特性及其应用

参看图 11-1 和式(11-1),引用描述负反馈系统的基本表达式

$$H(s)=\frac{A(s)}{1+F(s)A(s)}$$

通常，在输入信号工作的频率范围之内，若环路增益 $F(s)A(s)$ 的模远大于 1，可得到以下近似关系式

$$H(s)\approx\frac{A(s)}{F(s)A(s)}=\frac{1}{F(s)},(\text{当}\,|F(s)A(s)|\gg 1) \qquad (11-3)$$

由此近似式可给出表征反馈系统性能的重要结论。即当 $|F(s)A(s)|\gg 1$ 时：

(1) 前馈通路系统函数 $A(s)$ 对整个系统函数 $H(s)$ 的影响可忽略不计；

(2) 整个的系统函数 $H(s)$ 近似等于反馈通路系统函数 $F(s)$ 的倒数。

从以下的讨论将看到，反馈系统的许多特性及其应用都与以上两点结论密不可分。

对于离散时间信号与系统也可得出与此类似的结果。

(一) 改善系统的灵敏度

在电子线路组成的系统中，当某些部件参数发生变化时（如有源器件的老化、温度影响以及电源电压变动等引起），系统的外部特性将随之改变，利用反馈技术可以削弱部件参数不稳定对整个系统函数产生的影响。此处先说明一个实例，然后用灵敏度的概念解释这一现象。

例如，希望制作一个增益为 $A_1=10$ 的放大器，当环境发生改变之后，若其增益下降至 5，则此系统性能发生太大的偏差，使用者无法接受。然而，若适当配合前置放大器并引入反馈之后，可使这一矛盾大大缓解。

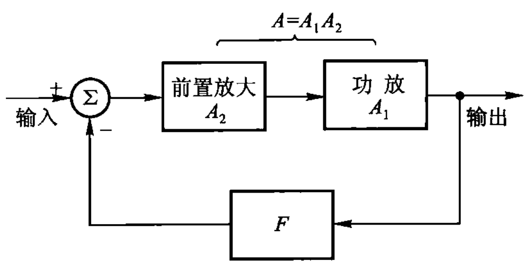


图 11-5 利用反馈技术改善系统的灵敏度

图 11-5 示出反馈系统框图，图中，末级功率放大器即原放大器（$A_1=10$），附加的前置放大器增益 $A_2=100$，反馈衰减器传输函数 $F=0.099$，令 $A=A_1A_2=1\,000$，可求得整个系统的增益为

$$H=\frac{1\,000}{1+0.099\times 1\,000}=10$$

满足所需要求。当功率放大器的增益从 10 降至 5 时，不难求得整个系统增益改变为

$$H' = \frac{500}{1 + 0.099 \times 500} = 9.9 \approx 10$$

可见，系统总的增益变动极小，使用者完全可能接受。必须注意，这里的前置放大器工作在较低功耗下并且不受负载影响，反馈衰减器选用无源器件，它们的成本低廉、性能稳定。

出现上述现象是由前面式(11－3)给出的反馈基本特性所决定的，即总增益

$$H = \frac{A_1 A_2}{1 + FA_1 A_2} \approx \frac{1}{F} \qquad (当\ FA_1 A_2 \gg 1)$$

即在满足环路增益远大于1的条件下，总增益与正向通路参数无关，只取决于 F。

波特给出灵敏度的定义如下：

$$S = \frac{整个系统增益相对变化}{指定元件增益相对变化} = \frac{\frac{\Delta H}{H}}{\frac{\Delta A}{A}} \qquad (11-4)$$

此即指定元件（一般为有源器件）引起的整个系统之灵敏度。灵敏度越低，系统性能的相对稳定性越好。在上例中，对于开环系统 $S = 1$，而对闭环系统 $S = \frac{0.01}{0.5} = 0.02$。显然，引入反馈之后使灵敏度大为改善。一般情况下，由于 ΔH 较小，式(11－4)可粗略近似为

$$S = \frac{A}{H}\frac{\Delta H}{\Delta A} \approx \frac{A}{H} \cdot \frac{\partial H}{\partial A} = \frac{1}{1 + FA} \qquad (11-5)$$

这表明，反馈的效果是使系统的灵敏度降低到无反馈时的 $\frac{1}{1 + FA}$。

（二）改善系统频响特性

利用反馈可以调整系统的动态特性。最常见到的此类应用如展宽放大器的频带，而付出的代价是适当降低放大器的增益。下面考察一个实例。在图 11－6 中，正向通路的系统函数为 $A(s) = \frac{A\alpha}{s + \alpha}$，这是一个一阶系统。若 α 为实数且 $\alpha > 0$，则此低通滤波器在 s 平面实轴上 $-\alpha$ 处有一阶极点。它的直流增益为 A，频带宽度（增益下降至最大值 A 的 $\frac{1}{\sqrt{2}}$，也即 3 dB点）是 α。为适当展宽频带，构成闭环系统。反馈通路的传输函数为 $F = \beta$，整个系统的系统函数表达式为

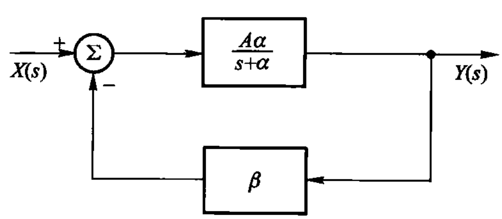


图 11－6 利用反馈改善系统频响特性

$$H(s)=\frac{A(s)}{1+FA(s)}=\frac{A\alpha}{s+(1+\beta A)\alpha} \tag{11-6}$$

可见，$H(s)$的极点从$-\alpha$移至$-(1+\beta A)\alpha$，带宽从α扩展到$\alpha(1+\beta A)$；而直流增益却从A降低到$\frac{A}{1+\beta A}$，也即降至原增益的$\frac{1}{1+\beta A}$。而带宽与最大增益的乘积保持不变，仍为αA。

在模拟电子线路的实际应用中，运算放大器在开环状态下往往具有很高的增益和较窄的带宽。为调整参数以符合实用要求，引入反馈（一般用电阻分压即可）使闭环带宽扩展，与此同时增益下降，二者乘积不变。

系统频域特性的调整完全可反映到时域特性。因此，若从时域观察，引入反馈可以减小系统阶跃响应的上升时间，也即反馈使频带展宽等效于响应的时间常数下降。在机电系统中常常利用这一原理降低马达转速控制的惰性。

（三）逆系统设计

在通信与控制系统中，有时希望实现某已知系统的逆系统。若原系统之系统函数为$H(s)$，相应的逆系统的系统函数$H_i(s)=1/H(s)$。为满足这一要求，一种方法是计算出$H_i(s)$，直接按此函数式设计、制作。另一种方法是利用原系统组成反馈系统，也可产生同样的效果。此时，反馈系统方框图如图 11－7 所示。

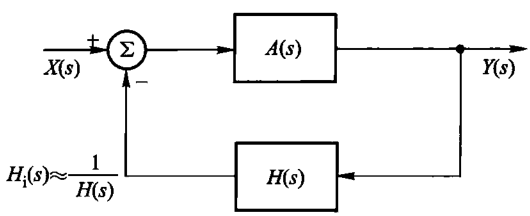


图 11－7 利用反馈构成逆系统

显然，在满足$A(s)H(s)\gg 1$的条件下，闭环系统的系统函数$H_i(s)$近似为

$$H_i(s)\approx\frac{1}{H(s)} \tag{11-7}$$

整个系统的系统函数$H_i(s)$即为$H(s)$的倒数，实现了所需的逆系统。

在许多实际问题中，当具有$H(s)$系统函数的设施更容易制作时，按图 11－7 的方法实现逆系统比较方便。另一种情况是$H(s)$可能随环境不断改变或难以确知$H(s)$的严格表达式时，采用反馈方法实现逆系统更显得十分必要。

例 11－1 已知图 11－8(a)所示，RC 桥 T 网络的电压传输函数为

$$H(s)=\frac{V_2(s)}{V_1(s)}=\frac{(RCs)^2+\frac{2}{\alpha}RCs+1}{(RCs)^2+\left(\frac{2}{\alpha}+\alpha\right)RCs+1} \tag{11-8}$$

式中$\alpha\gg 1$，$H(s)$零、极点分布如图 11－8(b)所示，幅频特性曲线如图 11－8(c)

所示，它具有带阻特性，试利用此电路与运算放大器组成一个带通滤波器。

解　由图 11-8(b)可见，桥 T 网络具有两个靠近虚轴的共轭零点和两个实轴上的极点，因而构成带阻滤波器。为实现带通特性应使零、极点位置互换，也即设计一个逆系统。仿照图 11-7 可给出所需逆系统如图 11-9(a)所示。图中，运放的增益 K 足够大，于是反馈系统的系统函数为

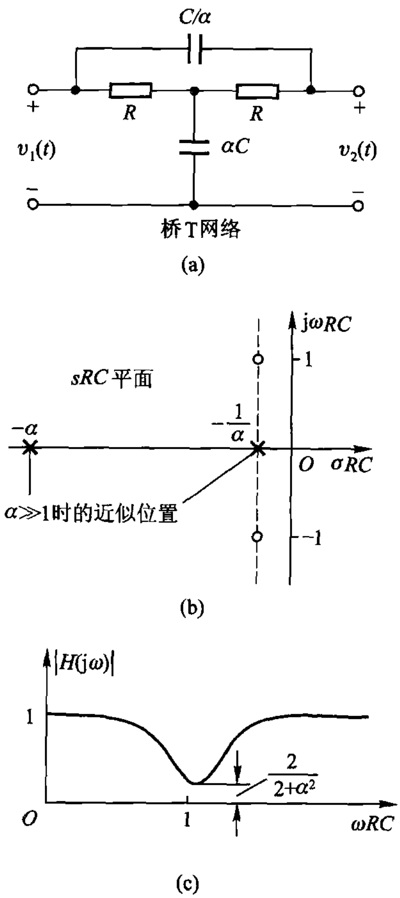


图 11-8　RC 桥 T 网络及其 s 域和频域特性

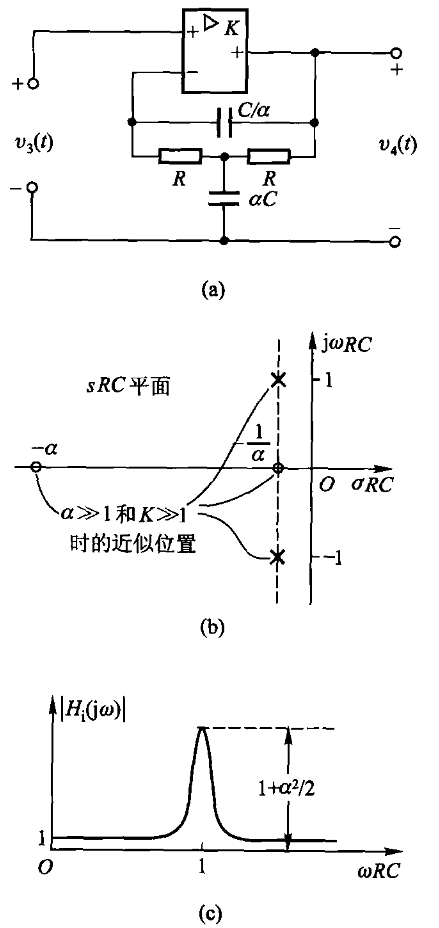


图 11-9　利用桥 T 网络构成的逆系统及其特性

$$H_{\mathrm{i}}(s)=\frac{V_4(s)}{V_3(s)}\approx\frac{1}{H(s)}$$
$$=\frac{(RCs)^2+\left(\dfrac{2}{\alpha}+\alpha\right)RCs+1}{(RCs)^2+\dfrac{2}{\alpha}RCs+1}\qquad(11-9)$$

$H_i(s)$的零、极点分布如图 11-9(b)所示，相应的频响特性如图 11-9(c)所示，实现了带通滤波特性。

不难设想，如果利用电感与电容组成谐振电路，也可使其系统函数呈现靠近虚轴的共轭极点，从而直接实现带通特性。然而，当频率较低时，所需电感体积、重量太大，利用本例给出的反馈系统方案更为合理。

（四）使不稳定系统成为稳定系统

前文已述，对于一个不稳定系统若适当引入负反馈可使其成为稳定系统。如倒立摆的动态平衡，火箭轨道控制以及生物繁殖的节制等。

例 11-2 若系统函数 $A(s)=\frac{b}{s-a}$，当 $a>0$ 时，此系统在右半平面有一阶极点，为不稳定系统，试引入负反馈使其稳定。

解 图 11-10 示出引入负反馈的闭环系统。取 $F(s)$为常数 k，容易写出整个系统的系统函数为

$$H(s)=\frac{A(s)}{1+F(s)A(s)}$$
$$=\frac{b}{s-a+kb} \qquad (11-10)$$

只要选择 $k>\frac{a}{b}$即可使极点移到左半平面，保证系统稳定。

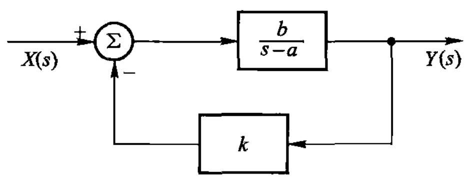


图 11-10 引入反馈改善系统的稳定性

在此反馈系统中，反馈通路系统函数 $F(s)$为常数，反馈信号按比例送回，因此称为比例控制反馈系统。如果 $F(s)$函数中含有 s 项，称为微分控制系统；含有 $1/s$ 项，称为积分控制系统；同时含有以上三项者称为比例-积分-微分控制系统，简写为 PID 系统(参看习题 11-12)。

下面讨论一个离散时间信号反馈系统的例子。为了说明利用反馈可以遏制某种动物总量的增长，我们来考察一个单种动物增殖的简化模型。

例 11-3 设 $y(n)$为第 n 代动物总量，假定在没有外界因素影响的条件下，自然繁殖将使每代总数加倍。另外，$e(n)$代表外界影响对总数引起的增减。考虑以上两方面建立差分方程表达式为 $y(n)=2y(n-1)+e(n)$，这是一个无反馈系统。实际上，在生态环境中都存在一些阻止增长的因素，例如有限食物的限制、本类物种的“天敌”对它们的捕食以及人类的捕猎和其他节制因素等。可

以认为这些因素是一种负反馈作用。假定 $y(n)$ 以 2β 倍的因子延迟反馈送至系统输入端,并以 $r(n)$ 表示,由此写出描述此反馈系统的时域模型为

$$y(n)=2y(n-1)+e(n) \tag{11-11}$$

$$r(n)=2\beta y(n-1) \tag{11-12}$$

$$e(n)=x(n)-r(n) \tag{11-13}$$

式中 $x(n)$ 为此系统的激励信号,它表示该物种的迁移或自然灾害等因素产生的效果。

(1) 由时域方程导出变换域(z 域)模型,画出反馈系统框图;

(2) 讨论它的稳定性、稳定条件。

解　假定正向通路的系统函数为 $A(z)$,反馈通路的系统函数为 $F(z)$,由时域表达式容易导出

$$A(z)=\frac{Y(z)}{E(z)}=\frac{1}{1-2z^{-1}} \tag{11-14}$$

$$F(z)=\frac{R(z)}{Y(z)}=2\beta z^{-1} \tag{11-15}$$

画出反馈系统方框图如图 11-11 所示。图中

$$X(z)-R(z)=E(z) \tag{11-16}$$

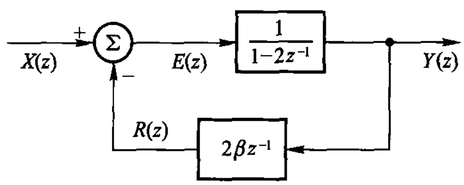


图 11-11　单种动物增殖的简化模型

求出闭环系统的系统函数 $H(z)$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{A(z)}{1-F(z)A(z)}$$

$$=\frac{1}{1-2(1-\beta)z^{-1}} \tag{11-17}$$

由 $A(z)$ 表达式可以看出,系统函数极点位于单位圆之外,它是不稳定系统,按此模型该物种将无休止增长。

当引入反馈之后,由 $H(z)$ 表达式可见,调节系数 β 可使系统进入稳定状态。为保证 $H(z)$ 的极点位于单位圆内的正实轴上,需满足

$$0<2(1-\beta)<1 \tag{11-18}$$

由此解得当 $\frac{1}{2}<\beta<1$ 时可使系统稳定。

当 $\beta<\frac{1}{2}$ 时，极点还是位于单位圆之外，系统仍不稳定。当 $1<\beta<\frac{3}{2}$ 时，极点虽在单位圆内，但是落于负实轴上，此时，系统的冲激响应呈正、负交替，不能得到确切的物理解释。容易想到，由于 β 大于 1，相当于把动物的总数经负反馈作用移去 100%以上，显然是不合理的。$\beta>\frac{3}{2}$ 也为不稳定系统。图 11－12(a)和(b)分别示出 $\beta>0$ 和 $\beta<0$ 时随 β 变动 $H(z)$ 极点在 z 平面的变动情况。

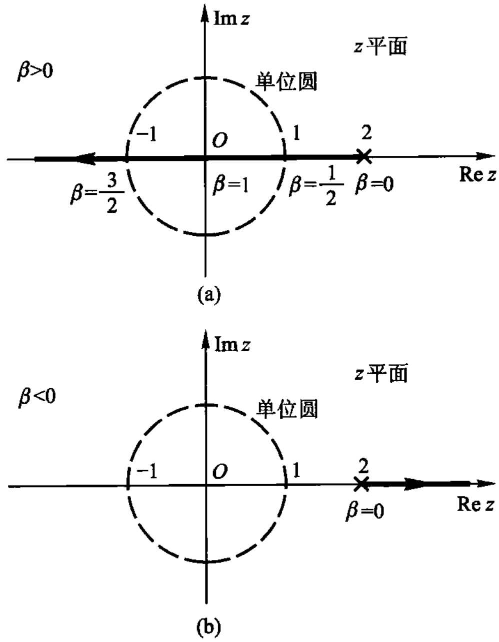


图 11－12　在例 11－3 中随 β 变动 $H(z)$ 极点在 z 平面的变动

由于许多实际因素未能考虑周全，因而上述模型是十分粗略的。然而，这一简化模型有助于认识反馈阻止物种增殖或灭绝的作用。前文已述，适当的 β 值可以使此系统从不稳定进入稳定状态，约束它的无限繁殖。反过来，如果出现自然灾害或由于“天敌”数目的增加而导致某一物种数量急剧减少，人类就可以采取措施，如限制捕猎以加速繁殖，这相当于减小 β，让系统解除稳定，使其有一快速增长过程，直至其总数再次达到正常值而进入稳定平衡状态。

11.3　利用反馈系统产生自激振荡

在人们广泛应用前节所述各种负反馈技术之前，已经认识到利用正反馈产生自激振荡。大约在 20 世纪 20 年代至 30 年代，陆续出现了多种按正反馈原理构成的正弦波自激振荡电路。实际上，这些电路工作在临界稳定状态。前节讨论的各种反馈技术往往力求避免系统的不稳定，而构成自激振荡电路的目的是希望它工作于临界稳定状态。在利用反馈系统时应根据不同需要从不同角度考虑系统的稳定性问题。

图 11－13 示出连续信号正反馈系统框图，若此系统满足 $A(s)F(s)=1$，则出现 $R(s)=E(s)$，此时，若 $X(s)=0$，也即在没有任何输入信号的情况下仍可

自动维持输出。将反馈通路输出端直接连接到正向通路的输入端，如图 11－13 中的虚线所示，电路将产生自激振荡。

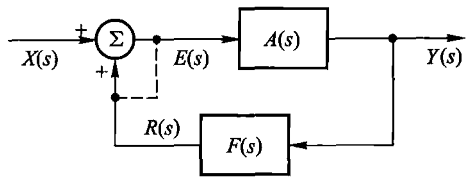


图 11－13　连续时间信号正反馈系统模型

对于产生振荡的条件 $A(s)F(s)=1$，可以分解为模量与辐角两部分来说明，即振荡条件是 $A(s)F(s)$ 的模量等于 1 和辐角为 2π。

有时，把图 11－13 改画为图 11－14 或图 11－15，此时，振荡条件改写为 $A(s)F(s)=-1$ 或模量条件仍为 1 而辐角条件为 π。

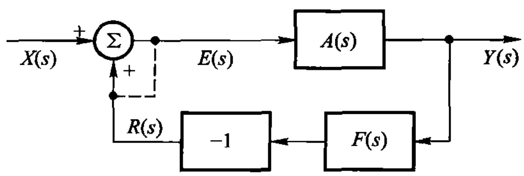


图 11－14　研究自激振荡的另一种反馈模型

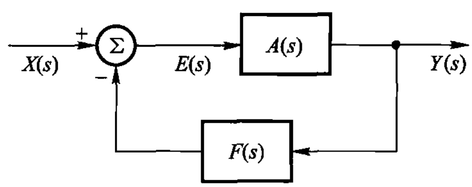


图 11－15　与图 11－14 等效的另一种表示方法

对于正弦波振荡器振荡条件应写作 $A(j\omega_0)F(j\omega_0)=1$ 或 $A(j\omega_0)F(j\omega_0)=-1$，振荡频率即 ω_0。

在第四章习题 4－47 曾分析类似于图 11－13 所示结构的自激振荡模型。此时，反馈系统的系统函数为 $H(s)=\dfrac{A(s)}{1-A(s)F(s)}$，它的极点是位于虚轴的一对共轭根，因而冲激响应是等幅正弦波。处于临界稳定状态。

实际的自激振荡电路大多包含工作于非线性状态下的电子器件。开机接入电源后由于非常微小的扰动借助正反馈作用产生增幅振荡，此时，环路增益大于 1。随着幅度增强，非线性器件使环路增益自动减小，最后平衡于等幅振荡状态，也即 $A(s)F(s)=1$。

严格分析上述过程需要建立非线性微分方程并对其求解。这里只从反馈系统临界稳定状态的条件利用线性系统分析方法给出构成自激振荡电路的原理实

例,有关具体实现的问题和深入的数学分析将在电子线路和非线性系统理论等课程中学习。

例 11-4 图 11-16 示出利用阻容网络作反馈通路构成的 RC 正弦波自激振荡电路,含有受控源的方框部分用有源电子器件构成,接通图中虚线即可实现自激振荡电路。求为满足自激振荡条件相应的 K 值以及振荡频率 ω_0。

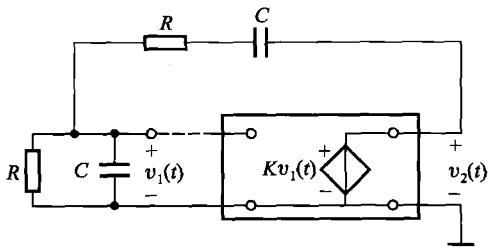


图 11-16 RC 正弦波自激振荡器

解

与图 11-13 相对应,此时

$$A(s)=\frac{V_2(s)}{V_1(s)}=K$$

$$F(s)=\frac{V_1(s)}{V_2(s)}=\frac{RCs}{(RCs)^2+3(RCs)+1} \qquad (11-19)$$

为保证 $A(s)F(s)=1$,应有

$$KRCs=(RCs)^2+3(RCs)+1 \qquad (11-20)$$

$$RCs^2+(3-K)RCs+1=0$$

当 $K=3$ 时,可求得 $s=\pm \mathrm{j}\frac{1}{RC}$,即正弦振荡频率为 $\omega_0=\frac{1}{RC}$。实际上,在电路起振时 $K>3$,由于电子器件的非线性作用,随着振幅增长而 K 减小,平衡于 $K=3$,呈等幅振荡。

例 11-5 图 11-17 示出在通信与电子系统中广泛应用的三点式正弦波自激振荡原理电路。图中,含受控源的方框部分用有源电子器件构成,A 为电压增益,R_o 为输出电阻。反馈网络由阻抗 $Z_1(s)$,$Z_2(s)$,$Z_3(s)$构成。

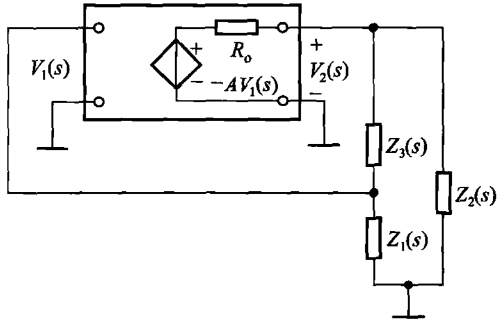


图 11-17 三点式正弦波自激振荡器

(1) 列写为满足自激振荡的方程式;

(2) 若反馈网络由纯电抗元件构成,即 $Z_1(j\omega)=jX_1, Z_2(j\omega)=jX_2, Z_3(j\omega)=jX_3$,为产生自激振荡,求 X_1, X_2, X_3 的约束条件。

解

与图 11-13 相对应,此时

$$A(s)=\frac{V_2(s)}{V_1(s)}=\frac{-AZ(s)}{Z(s)+R_o} \tag{11-21}$$

其中

$$Z(s)=\frac{Z_2(s)[Z_1(s)+Z_3(s)]}{Z_1(s)+Z_2(s)+Z_3(s)} \tag{11-22}$$

$$F(s)=\frac{V_1(s)}{V_2(s)}=\frac{Z_1(s)}{Z_3(s)+Z_1(s)} \tag{11-23}$$

为保证 $A(s)F(s)=1$,应有

$$\frac{-AZ_1(s)Z_2(s)}{Z_2(s)[Z_1(s)+Z_3(s)]+R_o[Z_1(s)+Z_2(s)+Z_3(s)]}=1$$

或

$$Z_2(s)[Z_1(s)+Z_3(s)]+AZ_1(s)Z_2(s)+R_o[Z_1(s)+Z_2(s)+Z_3(s)]=0 \tag{11-24}$$

在各阻抗为纯电抗元件的条件下有

$$-X_2(X_1+X_3)-AX_1X_2+jR_o(X_1+X_2+X_3)=0 \tag{11-25}$$

分别取式中虚部和实部为零得到

$$X_1+X_2+X_3=0 \tag{11-26}$$

和

$$(X_1+X_3)+AX_1=0 \tag{11-27}$$

也即

$$X_2=AX_1 \tag{11-28}$$

由式(11-26)与式(11-28)可见,为满足振荡条件要求电抗 X_1 与 X_2 同号,而 X_3 与它们异号。例如,X_1 若为容抗则 X_2 必为容抗,X_3 应为感抗。假定构成这三部分电抗的元件分别为电容 C_1, C_2 与电感 L,可利用式(11-26)求得产生正弦波自激振荡的频率 ω_0

$$-\frac{1}{\omega_0 C_1}-\frac{1}{\omega_0 C_2}+\omega_0 L=0$$

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{L\left(\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}\right)}} \tag{11-29}$$

在实际的电子线路中,三点线路的反馈网络由 LC 谐振回路或石英晶体构

成,利用后者有利于使自激振荡频率稳定。

对于一般的电子系统,可能由于设计或安装不当而产生设计者事先并不希望出现的自激振荡现象。最常见的实例如音响系统中扩音器的输出信号送到话筒输入端,构成反馈产生自激振荡,发出鸣叫声。此外,在通信系统硬件设备中,由于结构安装不合理也可能出现所谓“寄生振荡”,消除这种危害的方法是切断或削弱隐藏在系统中引起振荡的反馈因素,往往需要丰富的实际调试经验才能较好地解决这类问题。

正反馈作用不仅可以产生自激振荡,而且利用非线性正反馈系统经适当设计能够产生非常复杂的动态行为,研究内容很丰富,例如周期性振荡、间歇(周期循环与其他过程的交替)以及混沌(chaos,简略说,在确定性系统中将呈现非确定性行为)等现象。限于本书范围,有关非线性正反馈系统的理论和应用将留待后续课程或研究工作中学习。

在利用负反馈技术时,系统的稳定性是设计者必须考虑的重要问题。以下两节专门研究判别系统稳定性的两种方法。

11.4 根　轨　迹

由前面的讨论已经知道,反馈系统的性能取决于闭环系统函数特性。由系统函数极点、零点分布可以了解有关反馈系统性能的许多重要信息。如果反馈环路中有某个可调节的增益,随着此增益参数 K 的变化,闭环系统特征方程的根和极点位置将随之变化。特别是当研究系统的稳定性时,在 K 的改变过程中,系统可能从非稳定状态进入稳定状态或者反过来。在第四章例 4-26 和本章例 11-3 曾经注意到按照以上思路研究稳定性带来的方便。本节将给出这种方法的一般规律。也即考察闭环系统函数式中某参量变动时,特征方程的根(极点)在 s 平面内移动的轨迹(路径)。此方法称为根轨迹法,是由伊文思(W.R.Evans)于 1948 年首先提出的。按照根轨迹理论,可以导出一些基本的作图规则,借助这些规则可较方便地绘制根轨迹图形,研究系统中某参量变化对极点分布的影响,从而避免了一些复杂的数学计算。这种方法在反馈系统的设计和校正中得到广泛应用。下面依次讨论根轨迹图形的基本特性和绘图规则。基本特性包括根轨迹上的点应满足之模量条件和辐角条件。

(一)根轨迹的模量条件和辐角条件

设反馈系统的闭环系统函数仍如式(11-1),该系统的特征方程为

$$1+A(s)F(s)=0 \qquad (11-30)$$

这里,$A(s)F(s)$在一般情况下是 s 的有理分式,可以写作

$$A(s)F(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=K\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{k=1}^{n}(s-p_k)} \tag{11-31}$$

式中 z_i, p_k 分别为开环系统函数$A(s)F(s)$的零点与极点值。分子多项式$N(s)$为 m 阶,分母多项式 $D(s)$为 n 阶。系数 K 是分子与分母多项式最高幂次项系数之比,称为根轨迹增益,或称准开环增益。在根轨迹方法中最基本的作图形式就是研究当 K 值变化时,特征方程的根 p_k 在 s 平面中描出的轨迹。

将式(11－31)代入式(11－30)得到

$$1+K\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{k=1}^{n}(s-p_k)}=0 \tag{11-32}$$

将此式改写为

$$\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{k=1}^{n}(s-p_k)}=-\frac{1}{K}=\frac{1}{|K|}e^{jr\pi} \tag{11-33}$$

若 $K>0$,则上式中 r 为奇数,若 $K<0$,则 r 为偶数。将此式左端各矢量写作模与辐角形式,仍利用第四章 4.8 节的符号,得到

$$\frac{\prod_{i=1}^{m}N_i}{\prod_{k=1}^{n}M_k}e^{j\left(\sum_{i=1}^{m}\psi_i-\sum_{k=1}^{n}\theta_k\right)}=\frac{1}{|K|}e^{jr\pi} \tag{11-34}$$

式中 N_i 和 M_k 分别表示矢量$(s-z_i)$和$(s-p_k)$的模量,ψ_i 和 θ_k 分别表示两矢量的辐角。此等式两端的模量与辐角应分别对应相等,由此得到

$$\frac{\prod_{k=1}^{n}|s-p_k|}{\prod_{i=1}^{m}|s-z_i|}=\frac{\prod_{k=1}^{n}M_k}{\prod_{i=1}^{m}N_i}=|K| \tag{11-35}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\psi_i-\sum_{k=1}^{n}\theta_k=r\pi \qquad \begin{cases}K>0\ \text{则}\ r\ \text{为奇}\\ K<0\ \text{则}\ r\ \text{为偶}\end{cases} \tag{11-36}$$

式(11－35)就是根轨迹的模量条件,而式(11－36)为根轨迹的辐角条件。位于根轨迹上的各点 s 应满足此二条件。注意到当 K 在正值范围变化时,式(11－36)的总辐角为 180°的奇数倍,当 K 在负值范围变化时,总辐角是 180°的偶数倍。在以下的讨论中,一般情况下均指 K 为正值。

(二) 根轨迹作图规则

逐点改变 K 值求出相应极点的位置即可绘出根轨迹图。然而,这种方法只能在系统函数非常简单的情况下采用。当系统函数比较复杂时,这样做过于繁琐,难以体现根轨迹方法的优点。以前面给出的模量条件与辐角条件为基础可以导出根轨迹作图的若干规则。依据这些规则,即使系统函数复杂,也可较方便地绘制根轨迹图,下面逐条给出这些规则。

(1) 根轨迹具有 n 条分支。

由式(11-31)可知,开环系统函数 $A(s)F(s)$表达式中,分子多项式为 m 阶,分母多项式为 n 阶。一般情况下 $n \geqslant m$,它共有 n 个极点,当 K 改变时,特征方程的极点数目不会改变,因此,根轨迹曲线共有 n 条分支。

(2) 根轨迹始于开环系统函数 $A(s)F(s)$的极点,止于 $A(s)F(s)$的零点。

利用特征方程式(11-32)容易证明此条规则

$$1 + A(s)F(s) = 1 + K\frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)} = 0 \quad (11-37)$$

或写作

$$K(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m) + (s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n) = 0 \quad (11-38)$$

当 $K=0$ 时,特征方程为

$$(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n) = 0 \quad (11-39)$$

显然,此方程的根 $s = p_1, p_2, \cdots, p_n$,即开环系统函数的极点构成根轨迹曲线各分支的起始点(对应 $K=0$)。

式(11-37)也可写作

$$\frac{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}{K} + (s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m) = 0 \quad (11-40)$$

当 $K \to \infty$ 时,此式成为

$$(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m) = 0 \quad (11-41)$$

此处,方程的根 $s = z_1, z_2, \cdots, z_m$,即开环系统函数的零点构成根轨迹曲线各分支的终止点(对应 $K \to \infty$)。

对于 $m < n$ 的情况,$A(s)F(s)$有$(n-m)$个零点在∞处,所以 n 支根轨迹中有 m 支分别终止于 $z_1, z_2, \cdots, z_m$ 各零点上,另有$(n-m)$支则终止于∞。

(3) 根轨迹对 s 平面的实轴呈镜像对称。

由于构成特征方程的多项式是 s 的实有理函数,所以特征方程的根或为实数,或为共轭复数,它们都对称于实轴。当 K 值变化时,虽然根的位置随之移动,但是上述对实轴呈镜像对称的特性不变。

(4) 若有一段实轴，在它右边的实轴上 $A(s)F(s)$ 的极点与零点总数是奇数，则此段实轴是根轨迹的一部分。

利用式(11－36)的辐角条件可证明本规则。图 11－18 示出某系统开环系统函数 $A(s)F(s)$ 的极点和零点。下面借助辐角条件检验实轴上某点 s_1 是否落于根轨迹上。由图 11－18 可见，凡成共轭对的极点或零点，每对提供的辐角和为 2π，如图中 p_3, p_4 的辐角 θ_3 与 θ_4 之和。因此在计算总辐角时这些极点与零点不予考虑。对于实轴上的极点与零点，凡位于 s_1 点左边的，所提供的辐角都为零，如极点 p_2 的 θ_2；凡在 s_1 点右边的，提供角度都为 π，如 p_1 的 θ_1 以及 z_1 和 z_2 的 ψ_1 和 ψ_2。可见，只有当 s_1 点右边实轴上极点与零点之总数为奇数时，才能符合式(11－36)限定的辐角条件，矢量辐角代数和为 π 的奇数倍，因而 s_1 落于根轨迹上；反之，若极、零点总数为偶数时，s_1 点不属于根轨迹上的点。至此，规则(4)得证。

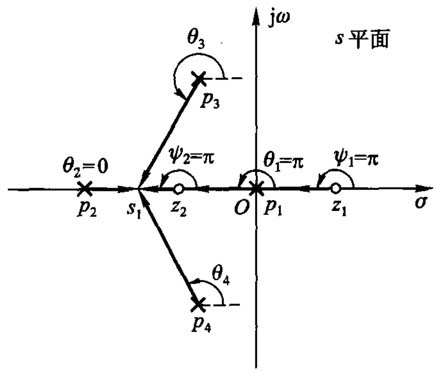


图 11－18　检验实轴上的 s_1 点是否在根轨迹上

下面利用上述 4 条规则绘制一些根轨迹图的实例，然后再讨论其他规则。

例 11－6　设反馈系统的开环系统函数为

$$A(s)F(s)=\frac{K}{s+3}$$

求系统的根轨迹。

解　此反馈系统的特征方程表达式为

$$1+\frac{K}{s+3}=0$$

由式(11－33)可知，落在根轨迹上的点应满足以下条件(模量与辐角条件)

$$|s+3|=|K|$$

$$-\theta=\pi$$

式中 θ 为矢量 $(s+3)$ 的辐角，$K>0$。综合考虑模量与辐角条件可写出

$$s+3=-K$$

开环极点位于 $p=-3$，根轨迹始于此点，对应 $K=0, s=-3$，随着 K 值增大，根轨迹在负实轴上向左移动，当 $K\to\infty$ 时，根轨迹趋于 $-\infty$。在此根轨迹右边的实轴上，开环极点与零点数目总和是奇数，符合规则(4)。作出根轨迹图形如图 11－19 所示。

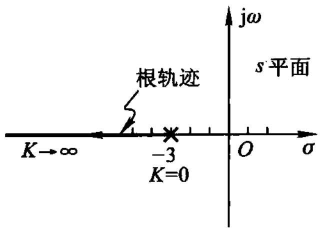


图 11－19 例 11－6 的根轨迹

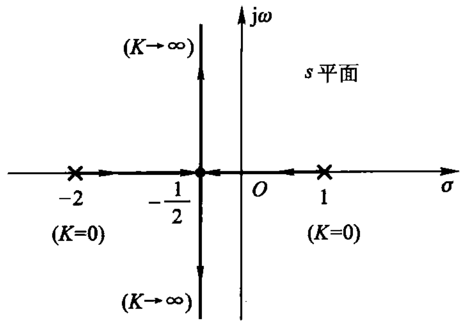


图 11－20 例 11－7 的根轨迹

例 11－7 对于第四章例 4－26(图 4－54)的反馈系统,按照本节的规则绘制根轨迹图。注意到该图中开环系统函数为

$$A(s)F(s)=\frac{K}{(s+2)(s-1)}$$

解 此反馈系统的特征方程表达式为

$$(s+2)(s-1)=-K$$

开环极点位于 $p_1=-2, p_2=+1$,根轨迹有二条分支。二分支的起始点分别位于 $s=-2$ 和 $s=+1$ 与以上二极点对应,终止点应与开环零点对应,即趋于无穷大。当 K 从 0 增加时两个分支都在负实轴上移动,在负实轴 $-2<s<+1$ 的区间内符合规则(4)的规定,根轨迹落于此区间(见图 11－20)。在 $s=-\frac{1}{2}$ 处特征方程出现重根,两分支会合,然后再上、下分开成共轭复根并趋向于∞。此外,右边分支与虚轴的交点对应 $K=2$。分支会合点以及根轨迹与虚轴交点的求解规律将在下面的规则(5)和(6)中导出。

(5) 两支根轨迹的交点可由以下方程求得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[A(s)F(s)]=0 \tag{11-42}$$

所谓交点是指两支根轨迹在此会合然后由此分离的点。满足此条件的点是特征方程的重根。设重根位于 s_0,特征方程可写作 $(s-s_0)^2$,对其求导得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[1+A(s)F(s)]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[A(s)F(s)]=0 \tag{11-43}$$

也即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[(s-s_0)^2]=2(s-s_0)=0 \tag{11-44}$$

可见,重根满足式(11－44)。利用式(11－44)即可求得 s_0 值。作为练习,读者可借助此规则验证例 11－7 会合点之值。

(6) 根轨迹与虚轴的交点可由 $s=\mathrm{j}\omega$ 代入特征方程而求出,由此写出

$$1+A(\mathrm{j}\omega)F(\mathrm{j}\omega)=0 \tag{11-45}$$

也即

$$D(\mathrm{j}\omega)+N(\mathrm{j}\omega)=0 \tag{11-46}$$

令此方程中的实部与虚部分别为零,即可解得 ω 值和 K 值,此时的 K 是划分系统稳定与不稳定的临界值。读者可利用此规则计算例 11-7 中根轨迹与虚轴相交对应的 ω 和 K 值。

(7) 当 $K\to\infty$ 时,根轨迹各分支趋向 $A(s)F(s)$ 的零点,其中有 m 个分支趋于有限零点,另有 $(n-m)$ 个分支各自沿"渐近线"趋向无穷远处的零点。渐近线与实轴的交角为 $\frac{l\pi}{n-m}$,其中 $l=1,3,5,\cdots$,共 $(n-m)$ 个正奇数。

下面给出本规则之证明。当 s 值很大时,$A(s)F(s)\approx K\frac{s^m}{s^n}$。也即当 $s\to\infty$ 时特征方程为

$$s^{n-m}=-K=K\mathrm{e}^{\mathrm{j}l\pi}\quad(l=1,3,5,\cdots) \tag{11-47}$$

方程的根为

$$s=(K\mathrm{e}^{\mathrm{j}l\pi})^{\frac{1}{n-m}}=K^{\frac{1}{n-m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{l\pi}{n-m}}\quad(l=1,3,5,\cdots) \tag{11-48}$$

此式就代表根轨迹趋于 ∞ 处的零点位置,这时根轨迹与渐近线重合,渐近线与实轴的交角即式(11-48)的辐角 $\frac{l\pi}{n-m}$,这里的 l 值只需要 $(n-m)$ 个连续的正奇数,超过 $(n-m)$ 个的 l 值求得的角度必然是重复的。

(8) 渐近线会交于实轴上的一点,此点称为渐近线重心,其坐标为

$$\sigma_0=\frac{(p_1+p_2+\cdots+p_n)-(z_1+z_2+\cdots+z_m)}{n-m} \tag{11-49}$$

为证明此规则,将开环系统函数 $A(s)F(s)$ 写作

$$\begin{aligned}A(s)F(s)&=K\frac{s^m+d_{m-1}s^{m-1}+\cdots+d_0}{s^n+c_{n-1}s^{n-1}+\cdots+c_0}\\&=\frac{K}{s^{n-m}+(c_{n-1}-d_{m-1})s^{n-m-1}+\cdots}\end{aligned} \tag{11-50}$$

借助代数二项式定理

$$(s-\sigma_0)^{n-m}=s^{n-m}-(n-m)\sigma_0 s^{n-m-1}+\cdots \tag{11-51}$$

当 s 很大时,上式中低幂次项可忽略不计,也即

$$(s-\sigma_0)^{n-m}\approx s^{n-m}-(n-m)\sigma_0 s^{n-m-1} \tag{11-52}$$

令

$$-\sigma_0=\frac{c_{n-1}-d_{m-1}}{n-m} \tag{11-53}$$

同时将式(11－52)的近似关系用于式(11－50)得到

$$A(s)F(s)\approx\frac{K}{(s-\sigma_0)^{n-m}} \tag{11-54}$$

再将式(11－50)与前边式(11－31)对照，可求得系数 c_{n-1} 与 d_{m-1} 分别和极点、零点具有如下关系：

$$c_{n-1}=-(p_1+p_2+\cdots+p_n)$$

$$d_{m-1}=-(z_1+z_2+\cdots+z_m)$$

最后求得式(11－49)

$$\sigma_0=\frac{(p_1+p_2+\cdots+p_n)-(z_1+z_2+\cdots+z_m)}{n-m}$$

本规则得证。

当 $s\to\infty$ 时，特征方程成为

$$1+\frac{K}{(s-\sigma_0)^{n-m}}=0 \tag{11-55}$$

由此导出

$$(s-\sigma_0)^{n-m}=-K=K\mathrm{e}^{\mathrm{j}l\pi}$$

$$s-\sigma_0=K\mathrm{e}^{\frac{1}{n-m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{l\pi}{n-m}}\quad(l=1,3,5,\cdots)$$

或

$$s=\sigma_0+K\mathrm{e}^{\frac{1}{n-m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{l\pi}{n-m}} \tag{11-56}$$

这就是根轨迹渐近线的直线方程式。$(n-m)$ 条渐近线都通过重心点 σ_0 处，并与实轴成交角 $\frac{l\pi}{n-m}$，$l=1,3,5,\cdots$，每条渐近线对应一个 l 值而具有不同交角。

必须注意，只有当 K 很大因而 s 也很大时，根轨迹才与渐近线贴近，而当 K 较小因而 s 也较小时，根轨迹将与渐近线有明显偏离，在下面的实例中将看到这些特点。

例 11－8 已知反馈系统结构如图 11－21 所示，试绘制其根轨迹图。

解 此系统的开环系统函数为

$$A(s)F(s)=\frac{K}{s(s+2)(s+4)}$$

可见，$A(s)F(s)$ 有三个极点，位

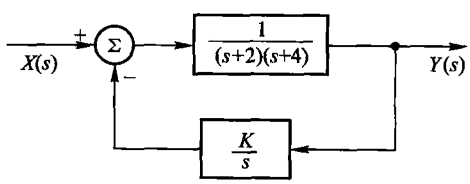


图 11－21 例 11－8 的方框图

于0、-2、-4，没有有限零点。因此，根轨迹有三支。当 K 由 0 增大时，轨迹图形分别从 s 平面的0、-2、-4 三点开始，当 $K\to\infty$时，三支都终止于无穷远。

图 11-22 中已标注上述三个极点，在实轴上 0 至 -2 和 -4 至∞两段右方都具有奇数个极、零点，因此，这两段实轴都是根轨迹的一部分。

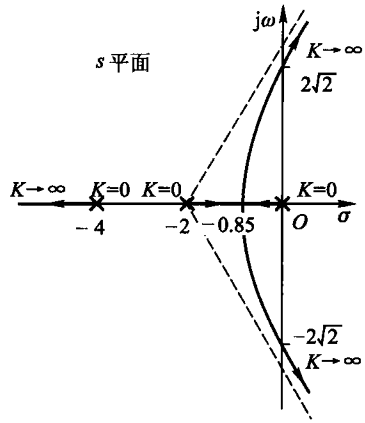


图 11-22 例 11-8 的根轨迹

渐近线的重心可借助式(11-49)求出，在实轴上的坐标值为

$$\sigma_0=\frac{(p_1+p_2+\cdots+p_n)-(z_1+z_2+\cdots+z_m)}{n-m}$$

$$=\frac{-2-4}{3}=-2$$

同时利用式(11-48)求得渐近线与实轴交角为

$$\frac{l\pi}{n-m}=\frac{l\pi}{3},\qquad (l=1,3,5)$$

算出交角分别为$\frac{\pi}{3}$，π，$\frac{5\pi}{3}$。

三个分支的交会点应满足式(11-42)的条件，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[A(s)F(s)]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{K}{s(s+2)(s+4)}\right]=0$$

导出方程

$$3s^2+12s+8=0$$

解出二个根 s_1 和 s_2 分别为 $-2-\frac{2\sqrt{3}}{3}$和 $-2+\frac{2\sqrt{3}}{3}$。再将此值代回特征方程求出相应的 K 值，对 s_1 点 $K=-3.08$，显然，K 为负值是不合理的结果；对 s_2 点 $K=3.08$，K 为正值是合理的答案，计算出 $s_2=-0.85$，此即分支交会点。

最后，求根轨迹与虚轴的交点，由式(11-45)有

$$1+A(\mathrm{j}\omega)F(\mathrm{j}\omega)=0$$

$$(\mathrm{j}\omega)^3+6(\mathrm{j}\omega)^2+8(\mathrm{j}\omega)+K=0$$

上式左端实部与虚部分别为零，于是有

$$\begin{cases}K-6\omega^2=0\\ \omega^2-8=0\end{cases}$$

解得

$$\omega = \pm 2\sqrt{2}$$

$$K = 48$$

在虚轴上 $\omega = \pm 2\sqrt{2}$处为根轨迹与其交点，对应的 K 值为 48。

综合以上结果绘出根轨迹于图11－22。

至此，我们只讨论了连续时间反馈系统的根轨迹问题，下面说明离散系统的情况。

从系统函数表达式的对照不难想到，离散时间反馈系统根轨迹作图方法与连续时间反馈系统类似。这时，图形将绘制于 z 平面，在判断系统稳定性时对连续系统以 s 平面虚轴为界，极点位于左右两半区分稳定与不稳定特性，而离散系统则以 z 平面单位圆为界按极点在圆内、圆外来判别是否稳定。

例 11－9 若离散时间反馈系统的结构如图11－2 所示，其中正向通路系统函数 $A(z)=\dfrac{K}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$，反馈通路系统函数 $F(z)=\dfrac{z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$试绘制其根轨迹图，并讨论 K 值对稳定性的影响（$K>0$）。

解 根据给定条件可求得开环系统函数

$$A(z)F(z)=\frac{Kz^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

$$=\frac{Kz}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)}$$

式中有二个极点，因而根轨迹有二条分支，分别起始于实轴上的$\frac{1}{4}$和$\frac{1}{2}$点，对应 $K=0$，见图11－23。在这两个极点之间的实轴部分其右端之极、零点总数为奇数，因而根轨迹落于其区间。对 $A(z)F(z)$式求导，可得到两分支的交会点

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{Kz}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)}\right]=0$$

由此解得两交会点位于 $z=\pm\frac{1}{\sqrt{8}}$处。对应 $K=\frac{3-\sqrt{8}}{4}$，两分支在 $+\frac{1}{\sqrt{8}}$点交会后出现共轭对极点，分别进入上、下两半平面呈圆形轨迹（参看习题11－

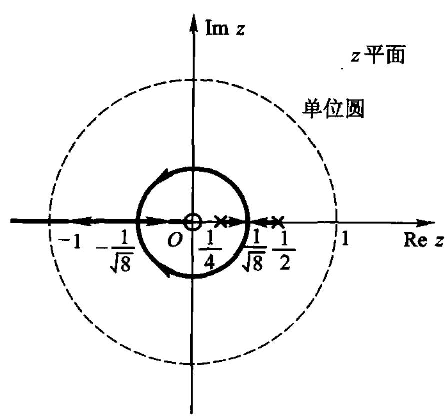


图 11－23 例 11－9 的根轨迹

18)，另一会合点位于 $-\frac{1}{\sqrt{8}}$，对应 $K=\frac{3+\sqrt{8}}{4}$，此后再分开为实轴上的左、右两部分。一条轨迹终止于原点，另一条终止于 $-\infty$（对应 $K\to\infty$）。

当 K 值足够大时系统将进入不稳定状态，分界点发生在根轨迹左边分支与单位圆相交之处，当极点落于单位圆之外时，系统不稳定。借助特征方程

$$1+A(z)F(z)=0$$

$$-Kz=\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)$$

令 $z=-1$，代入解得分界点之 K 值为 $K=\frac{15}{8}$，因此，当 K 满足

$$0<K<\frac{15}{8}$$

时，系统稳定。

11.5　奈奎斯特(Nyquist)稳定性判据

前节讨论的根轨迹方法给出了关于反馈系统闭环极点位置随系统中某参数 K 变化的详细情况。这种方法对于设计反馈系统和校正其性能，特别是稳定性的研究具有重要意义。然而，绘制根轨迹图的依据是必须已知开环与闭环系统函数表达式，且仅当此表达式为有理函数时此方法才适用。对于未能给出有理函数形式系统函数表达式的情况，此方法将无能为力。

本节将要介绍研究反馈系统稳定性的另一种作图描述方法，称为奈奎斯特稳定性判据。与根轨迹法相比较，此方法具有如下特点：无需求出极点的精确位置，只是判断对应某 K 值系统是否稳定；此外，不一定需要给出系统函数表达式，可以是实验测量数据，也可用于非有理函数描述的反馈系统分析。

（一）复轨迹图

奈奎斯特判据方法需要利用复轨迹图进行分析，作为准备工作，首先介绍这种图形的基本规律。

系统函数的模量（幅度）和辐角都是变量 s 的函数。给定一个 s 值即可求得对应 $H(s)$ 的一对模量与辐角值。在 s 平面中指定一点，即可映射到 $H(s)$ 平面中的一点。在研究系统的频率特性时，取 s 变量中的 $\sigma=0$，复变量在 s 平面中沿 $\mathrm{j}\omega$ 轴移动，映射到 $H(\mathrm{j}\omega)$ 平面可得到一条曲线，称为系统函数的复轨迹。例如，对于图11－24(a)所示 RC 电路，转移电压比构成的系统函数表达式为

$$H(s)=\frac{V_2(s)}{V_1(s)}=\frac{1}{1+s} \tag{11-57}$$

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{1+\mathrm{j}\omega} \tag{11-58}$$

$H(\mathrm{j}\omega)$可分解为模量与辐角或实部与虚部

$$H(\mathrm{j}\omega)=|H(\mathrm{j}\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}$$
$$=\mathrm{Re}[H(\mathrm{j}\omega)]+\mathrm{jIm}[H(\mathrm{j}\omega)] \tag{11-59}$$

在图 11-24(b)的 $H(\mathrm{j}\omega)$平面中画出了式(11-58)对应 ω 从 $-\infty$至 $+\infty$变化时 $H(\mathrm{j}\omega)$的复轨迹。

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{1+\omega^2}-\mathrm{j}\frac{\omega}{1+\omega^2} \tag{11-60}$$

当 $\omega=0$ 时,复轨迹相应的点位于$(1+\mathrm{j}0)$点,当 $\omega=1$ 时,位于$\left(\frac{1}{2}-\mathrm{j}\frac{1}{2}\right)$,而当 $\omega\to\infty$时,轨迹落于 0 点。容易求得,此复轨迹上的点满足以下方程

$$\left(\frac{1}{1+\omega^2}\right)^2+\left(\frac{\omega}{1+\omega^2}\right)^2=\frac{1}{1+\omega^2}$$

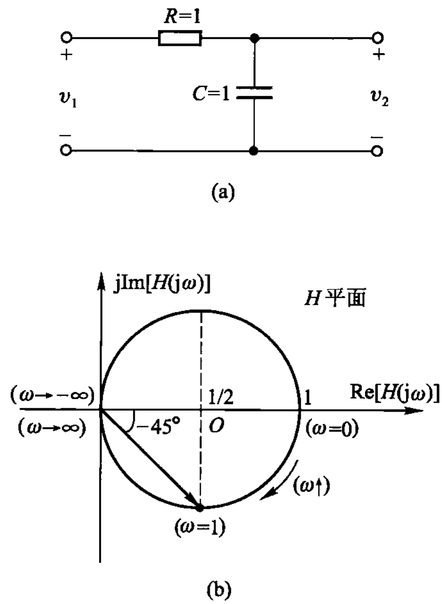


图 11-24 复轨迹图示例

或

$$\left(\frac{1}{1+\omega^2}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\omega}{1+\omega^2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2 \tag{11-61}$$

显然,这是圆心位于$\frac{1}{2}$处的圆,半径为$\frac{1}{2}$,如图11-24(b)所示。由于$|H(\mathrm{j}\omega)|$为 ω 之偶函数,$\varphi(\omega)$是 ω 的奇函数,轨迹图形以实轴镜像对称。

(二) 围线映射的基本特性

设反馈系统闭环特性表达式为

$$H(s)=\frac{A(s)}{1+A(s)F(s)}$$

以 $G(s)$表示 $H(s)$的分母写作

$$G(s)=1+A(s)F(s)=1+\frac{N(s)}{D(s)}$$
$$=\frac{D(s)+N(s)}{D(s)} \tag{11-62}$$

此处,$A(s)F(s)$的分母多项式 $D(s)$之幂次通常高于分子 $D(s)$之幂次,因此 $D(s)+N(s)$与 $D(s)$之幂次相等,式(11-62)可写作

$$G(s)=K_1\frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)} \tag{11-63}$$

在 $D(s)$幂次高于 $N(s)$的情况下，$m=n$，系数 $K_1=1$。

下面研究当因式$(s-z_1)$，$(s-z_2)$，…以及$(s-p_1)$，$(s-p_2)$，…随 s 变化而改变其辐角时，对于函数 $G(s)$总辐角之影响。

若在 s 平面中，s 沿围线(闭合路径)C 变化，围线内包含一个零点 z_{1a}，因式$(s-z_{1a})$可用由 z_{1a}到 s 的矢量表示，如图11－25(a)所示。当 s 沿围线 C 顺时针方向变化一周时，矢量$(s-z_{1a})$随之顺时针旋转一周，从而使$G(s)$的总辐角按负值增加 2π，也即在 $G(s)$平面中映射的轨迹是包含原点的围线，变化方向也是顺时针，如图11－25(b)所示。若有零点 z_{1b}在围线 C 之外，而围线内没有零点时，则当 s 沿围线C 变化一周而引起的矢量$(s-z_{1b})$辐角净变化等于零，于是$G(s)$总辐角变化也是零，在 $G(s)$平面中映射的轨迹将不包含原点，如图11－25(c)和(d)所示。显然，若在 s 平面中围线包含两个零点 z_{1c}、z_{1d}，则$G(s)$总辐角将按负值增加 4π，在 $G(s)$平面中映射的围线将绕原点两周，变化方向都是顺时针，如图11－25(e)和(f)所示。在以上讨论中，若把零点改换为极点可得类似结论。由于极点矢量因式位于 $G(s)$表达式分母之中，当 s 沿围线顺时针变化一周时，若围线包围一个极点，则 $G(s)$总辐角按正值增加 2π，也即 $G(s)$平面映射之围线将逆时针围绕原点旋转一周。

(三) s 右半平面零、极点数目与 $G(j\omega)$平面复轨迹图特性的对应

现在考虑 s 平面内围线由 $j\omega$ 轴和右半平面中半径 $R\rightarrow\infty$ 的半圆组成的情况，如图11－26(a)所示。此时围线包含了全部右半平面。当 s 沿 $j\omega$ 轴向 $-j\infty$ 变到 $+j\infty$ 时，按照 $G(j\omega)=1+A(j\omega)F(j\omega)$可在 $G(j\omega)$平面中作出相应的复轨迹，如图11－26(b)所示。此复轨迹是 s 平面中 $j\omega$ 轴映射于$G(j\omega)$平面的曲线，在系统稳定性分析中称之为奈奎斯特图。

由于 $G(s)$表达式分子与分母阶次相等，因而当 $s\rightarrow\infty$ 时，$G(s)$趋于实常数，也即当 $s=j\omega=\pm\infty$(包括半径为∞之半圆)时，映射在 $G(s)$平面为实轴的一个点。当 $s=j\omega=0$ 时，由 $G(s)$表达式容易看出，映射到 $G(s)$平面也为实轴上的一个点。考虑到 $G(j\omega)$的模量$|G(j\omega)|$和辐角 $\varphi(\omega)$分别为 ω 的偶、奇函数，所以奈奎斯特图中，ω 从 0 到∞的轨迹曲线和 0 到 $-\infty$的轨迹曲线对实轴成镜像对称。根据以上特性绘出的奈奎斯特图对应 ω 从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 呈封闭曲线，例如图11－26(b)所示。

若右半 s 平面有 $G(s)$的一个零点，当 s 沿图11－26(a)所示围线顺时针变化一周时，$G(j\omega)$绘出的奈奎斯特图应当顺时针绕原点一次。若 s 右半平面内有 $G(s)$的一个极点，则当 s 沿围线顺时针变化一周时，$G(j\omega)$的奈奎斯特图逆时针绕原点一次。在左半平面的零、极点不会产生这种使奈奎斯特图绕原点之作用。

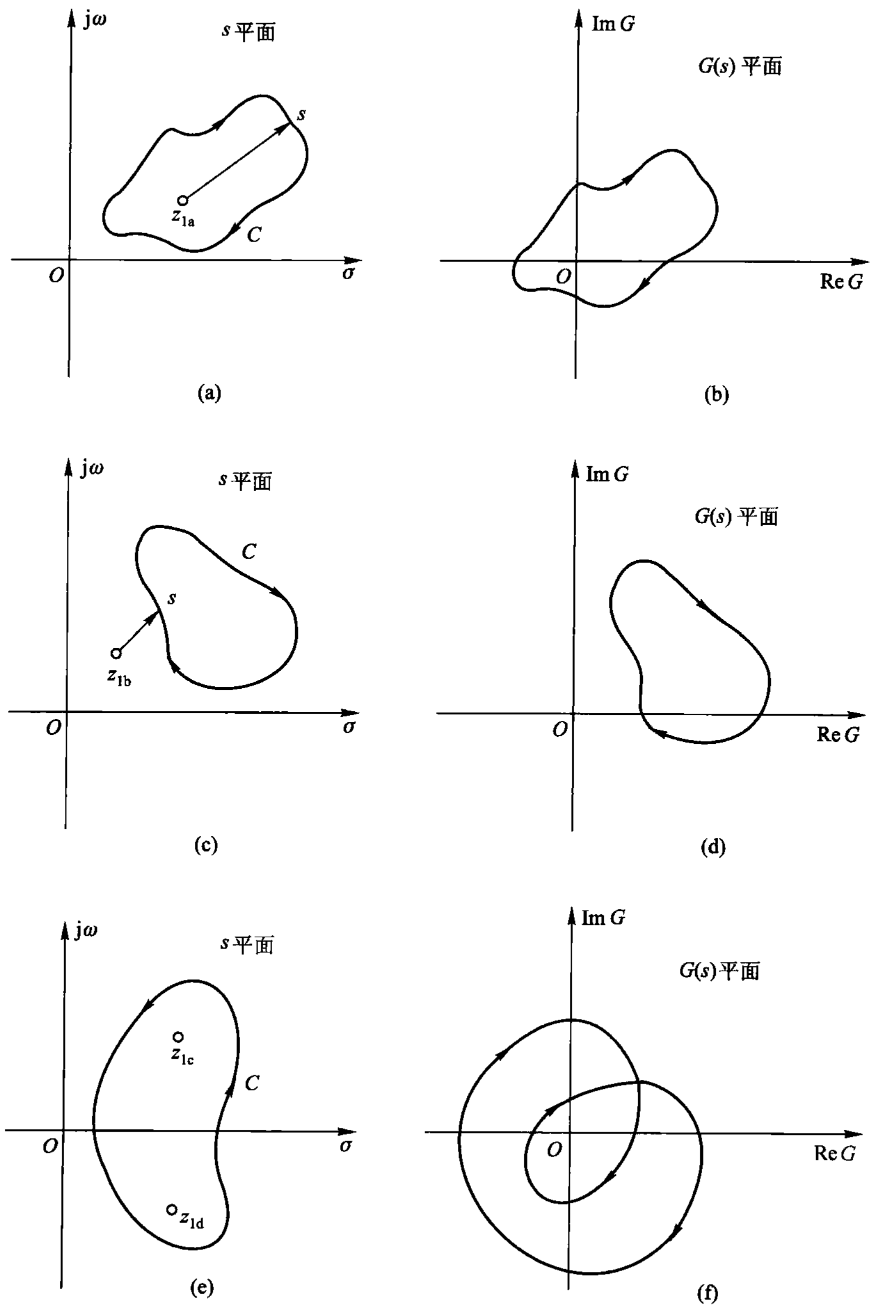


图 11－25 从 s 平面到 G 平面的围线映射

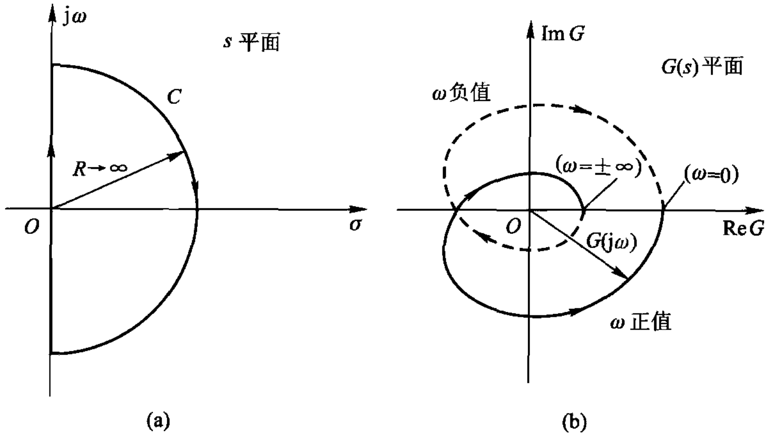


图 11－26　s 平面的 jω 轴映射于 G 平面构成奈奎斯特图

(四) 由 $A(s)F(s)$ 平面奈奎斯特图判断系统稳定性

为简化实际问题的分析过程，可以把上述 $G(s)$ 平面的奈奎斯特图移入 $A(s)F(s)$ 平面。由于 $A(s)F(s)=G(s)-1$，因此只需把 $G(s)$ 平面中的坐标原点右移到 $(+1+\mathrm{j}0)$（也即曲线图形左移），即可得到 $A(s)F(s)$ 平面的奈奎斯特图，也即将图11－26(b)变成图11－27。这时，前面有关 $G(s)$ 平面中曲线围绕原点的陈述都应改为围绕 $A(s)F(s)$ 平面中围绕 $(-1+\mathrm{j}0)$ 点的陈述。

综上所述，可以得到一般情况下反馈系统奈奎斯特判据如下：若 $G(s)=1+A(s)F(s)$ 在右半 s 平面内有 n_z 个零点和 n_p 个极点，则当 ω 由 $-\infty$ 变到 $+\infty$ 时，在 $A(\mathrm{j}\omega)F(\mathrm{j}\omega)$ 平面中的奈奎斯特图顺时针方向围绕 $-1+\mathrm{j}0$ 点 (n_z-n_p) 次。若 $n_z<n_p$，则按逆时针围绕 $(-1+\mathrm{j}0)$ 点 (n_p-n_z) 次。

为判断系统是否稳定，需要考察系统函数分母多项式 $G(s)=1+A(s)F(s)$ 在 s 右半平面是否有零点，要利用上述奈奎斯特图的方法，还需了解 $G(s)$ 在右半 s 平面的极点情况，事情比较麻烦。然而，在一般情况下，系统未接入反馈时，也即开环特性是稳定的，这时 $A(s)F(s)$ 没有极点在右半 s 平面，随之，$G(s)$ 也没有极点在右半平面，即 $n_p=0$。于是，上述判别规则得以简化，可以得到在开环特性稳定条件下的奈奎斯特判据如下：

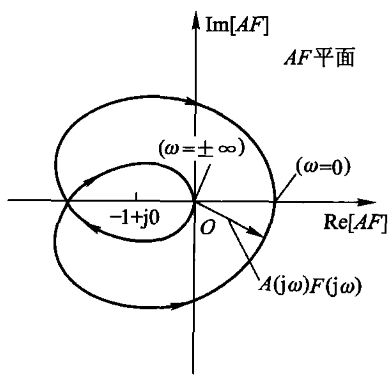


图 11－27　AF 平面中的奈奎斯特图

当 ω 由 $-\infty$ 到 $+\infty$ 改变时，在 $A(\mathrm{j}\omega)\cdot$

$F(j\omega)$平面中的奈奎斯特图顺时针绕$(-1+j0)$点之次数等于系统函数分母$G(s)=1+A(s)F(s)$在s右半平面内的零点数[即系统函数$H(s)$的极点数]。此奈奎斯特图若不包围$(-1+j0)$点，则系统稳定，否则系统不稳定。

例如，在图 11-27 中，复轨迹曲线顺时针围绕$(-1+j0)$点两次，因而，待判别的系统是不稳定的。

在实际问题中，由于在开环情况下容易测得$A(j\omega)F(j\omega)$的正弦稳态频率响应曲线，因而可按此绘制奈奎斯特图，直接判断系统的稳定性，无需进行繁复的数学计算。

例 11-10 若开环系统函数表达式为

$$A(s)F(s)=\frac{K_0}{\left(1+\dfrac{s}{\omega_0}\right)^3}$$

利用奈奎斯特图分析K满足什么条件时系统稳定。

解 开环频响特性表达式为

$$A(j\omega)F(j\omega)=\frac{K_0}{\left(1+j\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^3}$$

当$\omega=0$时，$A(j0)F(j0)=K_0$，奈奎斯特图位于图11-28中的B点，即$\overline{OB}=K_0$即此点对应的模量，而辐角为0。随着ω加大，曲线在实轴下边向左旋转；当$\omega=\omega_c$时，构成辐角为π，轨迹落于负实轴A点；此后，继续增加ω，模量将逐步减小，曲线在实轴上方趋于原点，直至$\omega=\infty$时轨迹终止于O点。按照对于实轴镜像的原理可绘出ω为负值的曲线如图11-28所示。

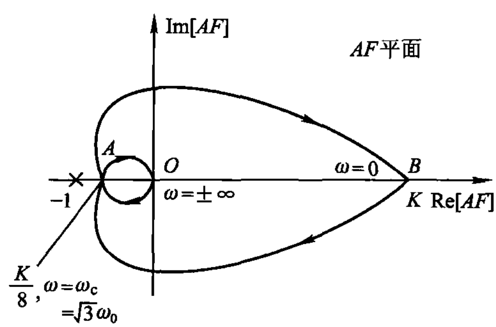


图 11-28 例 11-10 的奈奎斯特图

下面计算A点的位置，当$\omega=\omega_c$时，由辐角特性可写出

$$3\arctan\left(\frac{\omega_c}{\omega_0}\right)=\pi$$

$$\frac{\omega_c}{\omega_0}=\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$$

将此值代入模量表达式

$$|A(j\omega)F(j\omega)|=\frac{K_0}{[1+(\sqrt{3})^2]^{\frac{3}{2}}}=\frac{K_0}{8}$$

也即在图 11－28 中　$\overline{OA}=\frac{K_0}{8}$，为使系统稳定，$\overline{OA}$最大值不能超过 1，这样才能保证奈奎斯特图不包围$(-1+j0)$点，由此求得系统稳定之条件为$\overline{OA}<1$，即

$$K_0<8$$

以上讨论了 $A(s)F(s)$没有位于 s 右半平面极点的情况，也即 $n_p=0$ 的情况。如果 n_p 不等于零，为使 n_z 等于零（保证稳定），奈奎斯特图应逆时针围绕$(-1+j0)$点 n_p 次。详见习题11－21。

奈奎斯特稳定性判据也可应用于离散时间反馈系统。这时，不同于连续系统时 s 变量沿 s 平面虚轴从$-\infty$变到$+\infty$，而是 z 变量沿 z 平面单位圆从$-\pi$变化到$+\pi$（或从 0 到 2π），或者说不再研究 $s=j\omega$ 产生的映射，而是更换为 $z=e^{j\omega}$ 对应的复轨迹描绘。奈奎斯特图的绘制也由 $A(j\omega)F(j\omega)$ 平面改换为 $A(e^{j\omega})F(e^{j\omega})$平面。与前述连续时间信号的奈奎斯特稳定性判据相对比，在开环特性稳定的条件下，离散时间信号的奈奎斯特判据陈述如下：

当 ω 由 0 变化到 2π 时，在 $A(e^{j\omega})F(e^{j\omega})$平面中的奈奎斯特图顺时针方向围绕$(-1+j0)$点的次数等于 $G(z)=1+A(z)F(z)$在单位圆外的零点数，也即 $H(z)$的极点数。此奈奎斯特图若不包围$(-1+j0)$点，则系统稳定，否则系统不稳定。

例 11－11　若离散时间信号反馈系统的结构如图 11－2 所示，其中 $A(z)=\frac{z^{-2}}{\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)}$，$F(z)=K$，且 $K>0$。试利用奈奎斯特稳定性判据决定 K 满足什么条件时系统稳定。

解　由给定条件导出

$$A(z)F(z)=\frac{K}{z\left(z+\frac{1}{2}\right)}$$

当 ω 由 0 到 2π 改变时，画出 $A(e^{j\omega})F(e^{j\omega})$复轨迹如图11－29 所示。

当 $\omega=0$ 时，$A(e^{j0})F(e^{j0})=\frac{2}{3}K$，奈奎斯特图位于 B_1 点，即$\overline{OB_1}=\frac{2}{3}K$ 为此点的模量，辐角为 0。随着 ω 增大，曲线在实轴下方向左旋转，当轨迹与负实轴相交于 A 点时，$A(e^{j\omega})F(e^{j\omega})=-K$，也即 $e^{j\omega}\left(e^{j\omega}+\frac{1}{2}\right)=-1$，此时对应的

ω 值为$\omega=\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\approx 0.58\pi$，$\overline{OA}=K$为其模量，辐角为 π。继续增加 ω，曲线在实轴上方向右旋转，当 $\omega=\pi$ 时，曲线再次与正实轴交于 B_2 点，$\overline{OB_2}=2K$ 为其模量，辐角为 2π。ω 从 π 到 2π 变化描绘的曲线与上述 0 至 π 的曲线对实轴呈镜像对称，完整的奈奎斯特图形如图11-29 所示。由图可见，若 A 点落于$(-1+\mathrm{j}0)$之左端，曲线包围$(-1+\mathrm{j}0)$点，系统将不稳定。为保证系统稳定，需要满足$\overline{OA}<1$，也即当 $0<K<1$ 时系统稳定。

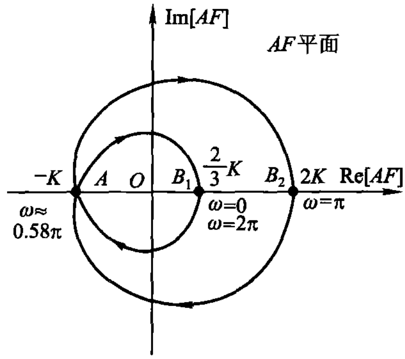


图 11-29 例 11-11 的奈奎斯特图

11.6 信号流图

（一）概述

利用方框图（子系统）组合分析线性系统的方法可使求解过程简化。在第一章 1.7 节已经利用一些基本运算单元，包括相加、倍乘和积分构成连续系统的模型。这种方法也称为线性系统的仿真（simulation，或称模拟）。在第七章 7.3 节用类似的方法构成离散系统模型，而基本运算单元由相加、倍乘、延时组成。在本章中，我们已经初步认识了组成反馈系统的方框图模型及其分析与计算。

为了进一步简化上述各种方框图（子系统）组合方法，出现了线性系统的“信号流图”（signal flow graphs）表示与分析方法。这种方法由美国麻省理工学院的梅森（Mason）于 20 世纪 50 年代初首先提出。此后在反馈系统分析、线性方程组求解、线性系统模拟以及数字滤波器设计等方面得到广泛应用。与方框图方法相比较，信号流图方法的主要优点是：系统模型的表示简明清楚；系统函数的计算过程明显简化。对于由多个反馈环路组成的复杂系统进行分析时，信号流图方法的优点更为突出。此外，借助信号流图研究系统状态空间分析也将显示许多优点，这将在第十二章介绍。

系统的信号流图表示实际上是用一些点和支路来描述系统。如图 11-30 所示的简单方框图，变成流图形式就是用一有始有终的线段表示：起始点标为 $X(s)$，终了点标为 $Y(s)$，这种点称为结点。结点是表示系统中变量或信号的点；线段表示信号传输的路径，称为支路；信号的传输方向用箭头表示，转移函数标注在箭头附近，所以每一条支路相当于乘法器。结点可以有很多信号输入，而且可以向不同方向输出，如图 11-31 所示，结点 X_4有三个输入，二个输出。按

流图构成原则有

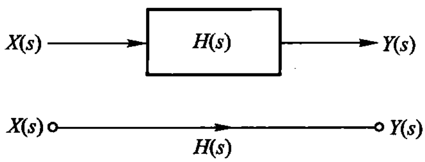


图 11－30　用信号流图表示框图

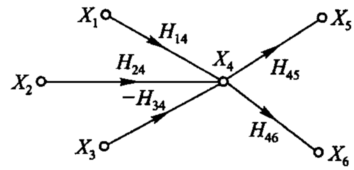


图 11－31　多输入多输出结点 X_4

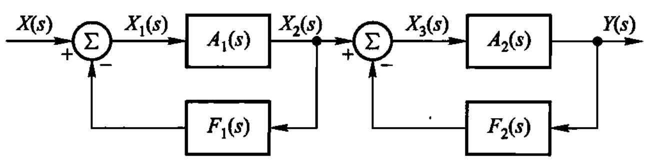
$$X_4 = H_{14}X_1 + H_{24}X_2 - H_{34}X_3 \tag{11-64}$$

$$X_5 = H_{45}X_4 \tag{11-65}$$

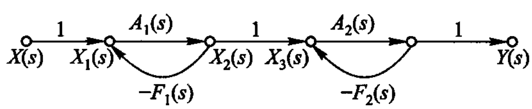
$$X_6 = H_{46}X_6 \tag{11-66}$$

类似这样的方程称为结点方程。作为练习,读者可将图 11－31 改画为对应的方框图,在该图中,除 H_{14},H_{24},$-H_{34}$,H_{45},H_{46}五个子系统方框图之外,还应包含一个相加器。

例 11－12　将图 11－32(a)所示的方框图改画为信号流图形式,并求系统的转移函数 $H(s)=\dfrac{Y(s)}{X(s)}$。



(a)



(b)

图 11－32　例 11－12 的方框图和流图

解　画出图 11－32(a)对应的信号流图如图11－32(b)所示。显然,这种表达形式比方框图结构简明清楚。

为求得系统转移函数,列出如下线性联立方程组

$X_1(s) = X(s) - F_1(s)X_2(s)$

$X_2(s) = X_1(s)A_1(s)$

$$X_3(s)=X_2(s)-F_2(s)Y(s)$$

$$Y(s)=A_2(s)X_3(s)$$

为了得到系统转移函数，需要对上列联立方程式求解，作为中间过渡，可将四个方程依次分为两组，容易解得

$$\frac{X_2(s)}{X(s)}=\frac{A_1(s)}{1+F_1(s)A_1(s)}$$

和

$$\frac{Y(s)}{X_2(s)}=\frac{A_2(s)}{1+F_2(s)A_2(s)}$$

以上两式联立，求得最后结果为 $H(s)$

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{A_1(s)A_2(s)}{[1+F_1(s)A_1(s)][1+F_2(s)A_2(s)]} \tag{11-67}$$

例 11－13 将图 11－33(a)所示方框图改画为信号流图形式，并求系统的转移函数 $H(s)=\dfrac{Y(s)}{X(s)}$。

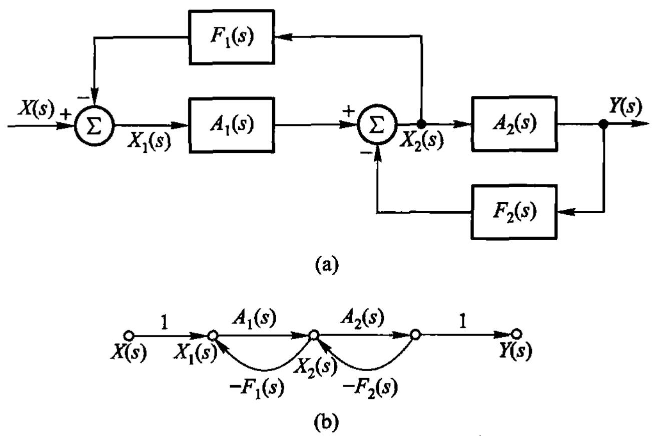


图 11－33 例 11－13 的方框图和流图

解 很明显，本系统框图中也包含两个反馈环路，此特征与例 11－12 相同。然而，必须注意它们之间有所区别。前例中两个反馈环相互独立，中间以转移函数为 1 的支路连接。而在本例中两环路相互接触，反馈作用将彼此产生影响。画出相应的流图如图 11－33(b)所示。

下面列出线性联立方程组，可见与前例并不相同

$$\begin{cases} X_1(s)=X(s)-X_2(s)F_1(s) \\ X_2(s)=X_1(s)A_1(s)-Y(s)F_2(s) \\ Y(s)=X_2(s)A_2(s) \end{cases}$$

解此联立方程，消去 $X_1(s)$和 $X_2(s)$最终求得 $Y(s)$与 $X(s)$之比即转移函数为

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{A_1(s)A_2(s)}{1+A_1(s)F_1(s)+A_2(s)F_2(s)} \tag{11-68}$$

（二）在流图中一些术语的定义

结点　表示系统中变量或信号的点。

转移函数　两个结点之间的增益称为转移函数。

支路　连接两个结点之间的定向线段，支路的增益即为转移函数。

输入结点或源点　只有输出支路的结点，它对应的是自变量(即输入信号)。

输出结点或阱点　只有输入支路的结点，它对应的是因变量(即输出信号)。

混合结点　既有输入支路又有输出支路的结点。

通路　沿支路箭头方向通过各相连支路的途径(不允许有相反方向支路存在)。

开通路　通路与任一结点相交不多于一次。

闭通路　如果通路的终点就是通路的起点，并且与任何其他结点相交不多于一次。闭通路又称环路。

环路增益　环路中各支路转移函数的乘积。

不接触环路　两环路之间没有任何公共结点。

前向通路　从输入结点(源点)到输出结点(阱点)方向的通路上，通过任何结点不多于一次的全部路径。

前向通路增益　前向通路中，各支路转移函数的乘积。

（三）信号流图的性质

在运用信号流图时必须遵循流图的以下性质：

(1) 支路表示了一个信号与另一信号的函数关系，如图 11－30 所示 $Y(s)=H(s)X(s)$的线性关系。信号只能沿着支路上的箭头方向通过。

(2) 结点可以把所有输入支路的信号叠加，并把总和信号传送到所有输出支路，如图 11－31 所示的结点 X_4。

(3) 具有输入和输出支路的混合结点，通过增加一个具有单位传输的支路，可以把它变成输出结点来处理。如图 11－34 所示，X_3'和 X_3''实际上是一个结点，但分成两个结点以后，X_3'是既有输入又有输出的混合结点，而 X_3''是只有输入的输出结点。

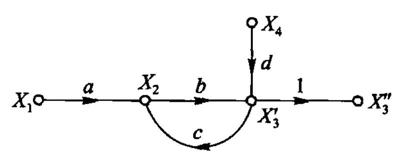


图 11－34　将一个结点分成两个结点

(4) 给定系统,信号流图形式并不是惟一的。这是由于同一系统的方程可以表示成不同形式,因而可以画出不同的流图。

例 11-14 若系统的数学模型以如下的一阶微分方程描述,试画出它的信号流图(在第一章习题1-19 曾练习画它的方框图)。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+a_0y(t)=b_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)+b_0x(t) \tag{11-69}$$

解 利用算子符号,以 p 表示微分,$\frac{1}{p}$表示积分,将给定的式(11-69)表示为

$$(p+a_0)y(t)=(b_1p+b_0)x(t) \tag{11-70}$$

或

$$\left(1+\frac{a_0}{p}\right)y(t)=\left(b_1+\frac{b_0}{p}\right)x(t) \tag{11-71}$$

解得 $y(t)$为

$$y(t)=\frac{b_1}{1+\frac{a_0}{p}}x(t)+\frac{\frac{b_0}{p}}{1+\frac{a_0}{p}}x(t) \tag{11-72}$$

按此式可画出信号流图如图 11-35(a)所示。图中,引入中间变量信号 $x_1(t)$和$x_2(t)$,它们之间的关系可用以下联立方程描述

$$\begin{cases}x_1(t)=-a_0x_2(t)+x(t)\\ x_2(t)=\frac{1}{p}x_1(t)\\ y(t)=b_1x_1(t)+b_0x_2(t)\end{cases} \tag{11-73}$$

利用式(11-73)可验证图 11-35(a)的正确性。

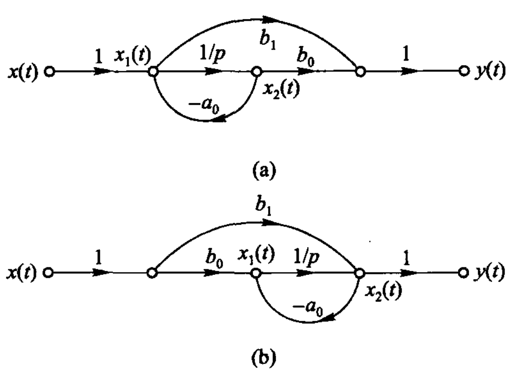


图 11-35 一阶微分方程的流图表示

对此系统还可以画出另一种形式的流图。为此，将式(11－69)改写为

$$y(t)=b_1x(t)+\frac{1}{p}[b_0x(t)-a_0y(t)] \tag{11-74}$$

按此式画出的信号流图见图 11－35(b)，此图可用如下联立方程描述

$$\begin{cases}x_1(t)=-a_0x_2(t)+b_0x(t)\\ x_2(t)=\dfrac{1}{p}x_1(t)+b_1x(t)\\ y(t)=x_2(t)\end{cases} \tag{11-75}$$

必须注意，在图 11－35(a)和(b)中的 $x_1(t)$与 $x_2(t)$具有不同的定义，所代表的结点并不相同。

(5) 流图转置以后，其转移函数保持不变。所谓转置就是把流图中各支路的信号传输方向给以调转，同时把输入输出结点对换。

例如，将图 11－35(a)按以上规定进行转置即可得到图 11－35(b)，显然，转移函数没有变化，两者代表同一系统。

(四) 信号流图的代数运算

流图既然表示一组线性方程组，代表某一线性系统，因而和系统的方框图表示一样，可以按一些代数运算规则加以简化。在图 11－36 中列出了基本的简化规则。其中，图(a)～(d)四条规则简单明了，不必再做解释。而图(e)是从图(d)演化而来，它的特点也是经简化后消除了中间的混合结点。图(f)是简单反馈环路的简化，应用广泛。我们在例 11－12 的求解过程中已经推导了它的简化规则。

利用这些信号流图的代数运算，就可以把一复杂的流图加以简化，使之只剩下一个源点和一个阱点，从而确定系统的转移函数。下面给出简化分析的实例。

例 11－15 利用流图代数运算规则对前文例 11－12 和例 11－13 对应的图 11－32(b)和图 11－33(b)分别进行简化，求出系统的转移函数。

解 为讨论方便，将以上二图重新画在下面，并且将各支路转移函数符号改用 a、b、c、d 表示，见图 11－37(a)和图 11－38(a)(注意图中 b 和 d 都没有负号)。

(1) 对于图 11－37(a)，我们运用图 11－36 中的规则(f)把两个简单的反馈环路依次简化为图 11－37(b)和(c)，最终容易给出图 11－37(d)所示的转移函数

$$H=\frac{Y}{X}=\frac{ac}{(1-ab)(1-cd)} \tag{11-76}$$

此结果与例 11－12 的答案完全一致。

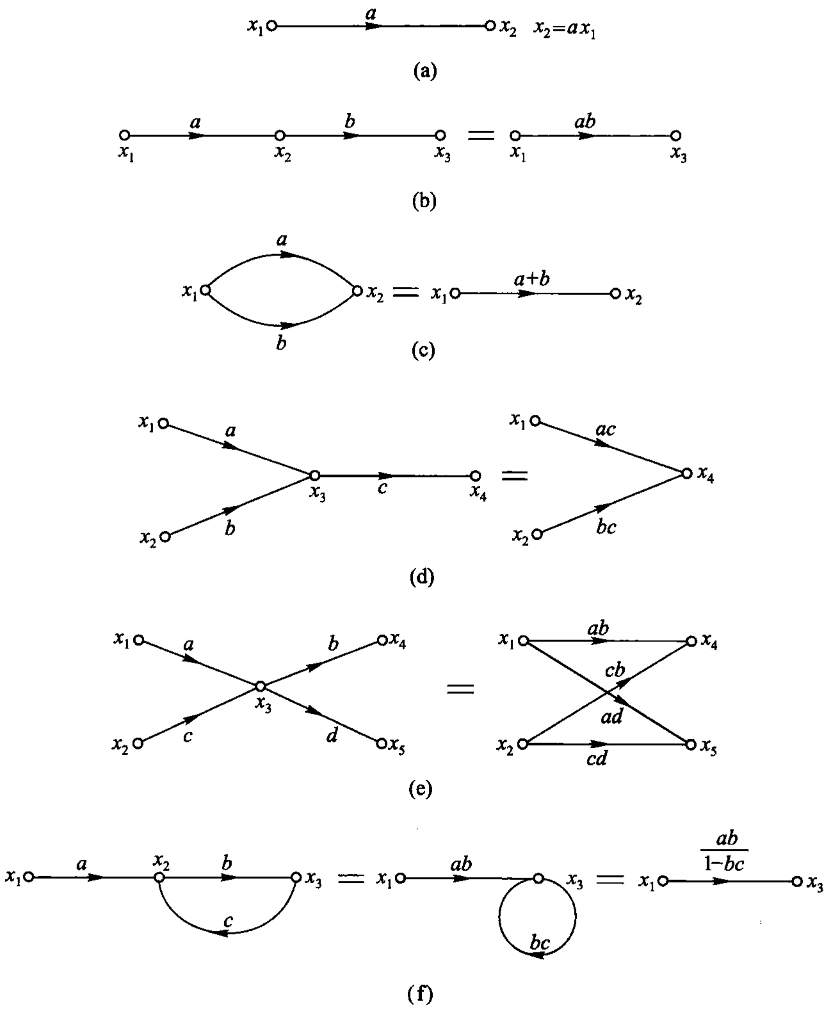


图 11－36 信号流图的代数运算规则

(2) 对于图 11－38(a)，注意到组成系统的两个反馈环路相互接触，因而简化过程要稍麻烦些。首先，从左边的 ab 环路入手简化得到图 11－38(b)。注意到当简化工作进入到下一步图 11－38(c)时，左边支路的$\dfrac{a}{1-ab}$一般不会有误，而右边的$\dfrac{d}{1-ab}$支路有可能会漏写分母中的 $1-ab$ 项，在此特别提醒关注。接下来的两步求图 11－38(d)和(e)比较容易，不再说明。最终给出图 11－38(e)所示的转移函数

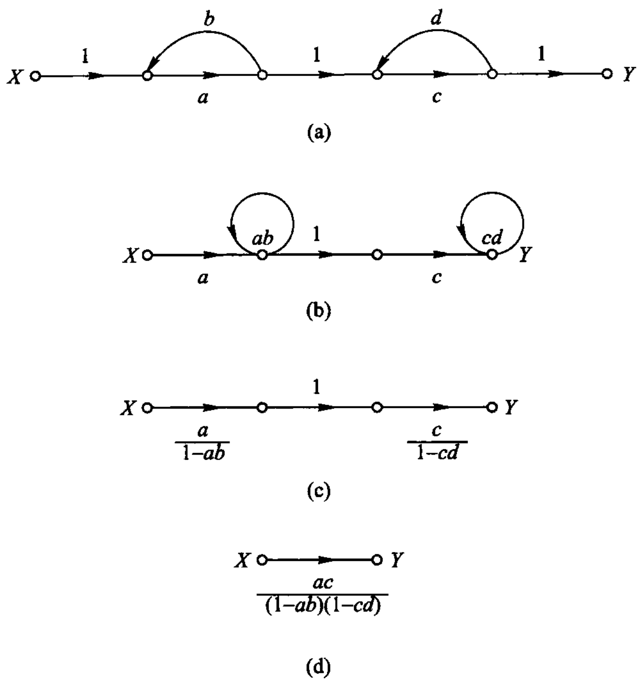


图 11－37　例 11－15(1)的简化过程

$$H=\frac{Y}{X}=\frac{ac}{1-ab-cd} \tag{11-77}$$

此结果与例 11－13 的答案也完全一致。

例 11－16　利用流图的代数运算规则化简图 11－39(a)所示系统，并求转移函数。

解　化简开始的第一步我们试图消除反馈环 ab，于是得到图 11－39(b)中的 ab 自环支路和左边的 a 支路，这时不要忘记在右边还应增加一个 be 支路，而这个支路有可能被漏掉。

实际上，这里的简化原理完全遵从前文图 11－36(e)之规则。与原规则中对应的中心结点(化简后将被消除)在此处是 ab 环左边的结点，两条输入支路分别为 b 和 1，而输出支路是 a 和 e。依此对照化简即可得出上述正确结果。特别提醒注意，这里有一个输入结点与输出结点重合为一个，即 ab 环左边的结点，这并不影响采用上述规则进行化简。化简后留下的四条支路分别为 a、e、ab 和 be。

接下来的几步，从图 11－39(c)～(e)的简化过程比较容易不再说明。最终给出转移函数

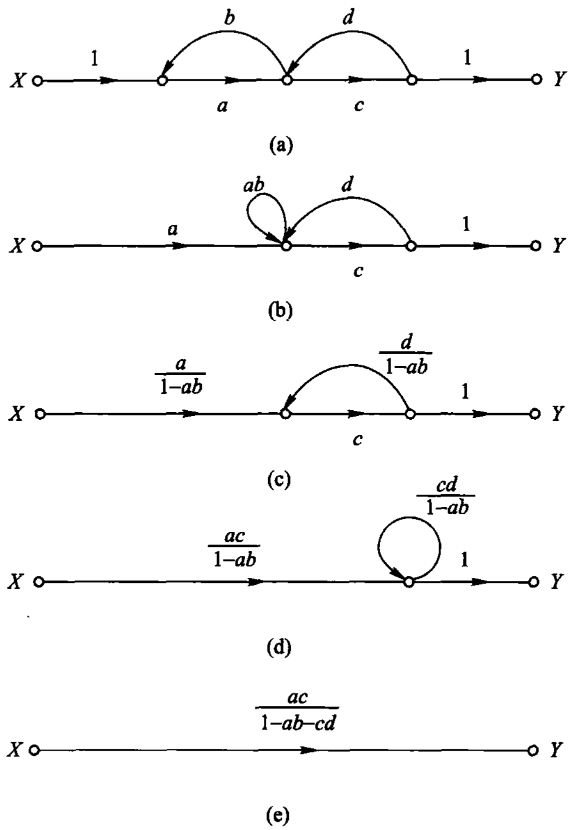


图 11-38 例 11-15(2)的简化过程

$$H=\frac{Y}{X}=\frac{ac+e}{1-ab-cd-bde} \tag{11-78}$$

从以上三例可以看出,借助流图运算规则依次化简可以省去求解联立方程式的复杂工作(也即避免了繁琐的行列式计算),简化了系统转移函数的计算过程。

然而,梅森对流图的研究成果并不止于此,他进一步提出了求系统转移函数的一般公式,得到更加简便的方法,这就是下面将要介绍的梅森增益公式。

(五)信号流图的梅森增益公式

利用梅森增益公式可以根据流图很方便地求得输入与输出间的转移函数。

梅森公式的形式为

$$H=\frac{1}{\Delta}\sum_{k}g_k\Delta_k \tag{11-79}$$

式中

Δ——称为流图的特征行列式。

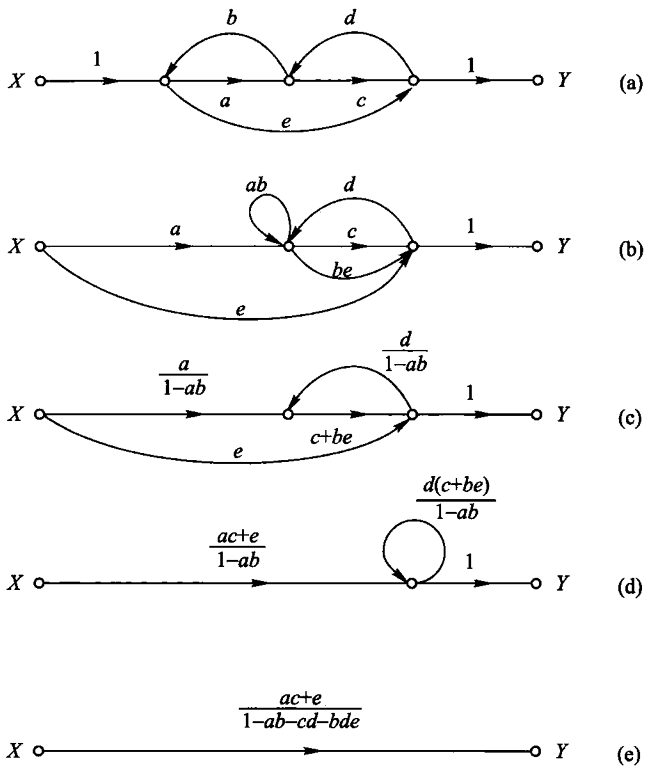


图 11-39 例 11-16 的简化过程

Δ = 1 -（所有不同环路的增益之和）+

（每两个互不接触环路增益乘积之和）-

（每三个互不接触环路增益乘积之和）+ …

$$= 1 - \sum_a L_a + \sum_{b,c} L_b L_c - \sum_{d,e,f} L_d L_e L_f + \cdots$$

k——表示由源点到阱点之间第 k 条前向通路的标号。

g_k——表示由源点到阱点之间第 k 条前向通路的增益。

Δ_k——称为对于第 k 条前向通路特征行列式的余因子。它是除去与第 k 条前向通路相接触的环路外，余下的特征行列式（或者说在 Δ 式中只留下与该通路不接触者，如果该通路与各环路都接触则 $\Delta_k = 1$）。

这里不讨论此公式的证明①，仅举出应用实例。

① 见文献：Mason S J. Feedback Theory: Further Properties of Signal Flow Graphs. Proc. IRE 44.920, 1956。

例 11－17 用梅森公式求前文例 11－15 对应的图 11－37(a)和图 11－38(a)两流图的转移函数。

解

(1) 图 11－37(a)包括两个互不接触的环路,其增益分别为

$$L_1: ab$$

$$L_2: cd$$

二者的乘积为 $abcd$,由此求得特征行列式

$$\Delta = 1 - ab - cd + abcd$$

前向通路只有一条

$$g_1 = ac, \quad \Delta_1 = 1$$

代入梅森公式后求得

$$H = \frac{Y}{X} = \frac{ac}{1 - ab - cd + abcd} \tag{11-80}$$

(2) 图 11－38(a)的两个环路与图 11－37(a)相同,但二者互相接触,因而有特征行列式为

$$\Delta = 1 - ab - cd$$

前向通路的情况与前者完全相同。最后求出

$$H = \frac{Y}{X} = \frac{ac}{1 - ab - cd} \tag{11-81}$$

此二例与前文结果完全一致,而计算过程明显简化。作为练习,读者可对例 11－16 用梅森公式求解。

例 11－18 求图 11－40 所示系统的转移函数。

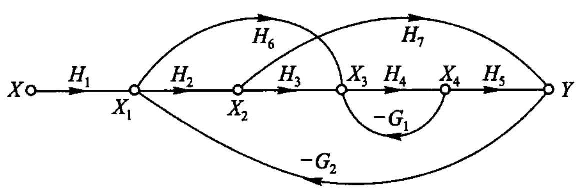


图 11－40 例 11－18 的系统流图

解 为了应用梅森公式,先求出有关参数。

(1) 求Δ

先求环路:

$$L_1=(X_3\to X_4\to X_3)=-H_4G_1$$
$$L_2=(X_2\to Y\to X_1\to X_2)=-H_7G_2H_2$$
$$L_3=(X_1\to X_3\to X_4\to Y\to X_1)=-H_6H_4H_5G_2$$
$$L_4=(X_1\to X_2\to X_3\to X_4\to Y\to X_1)=-H_2H_3H_4H_5G_2$$

再求两两不接触的环路

$$L_1\cdot L_2=H_2H_4H_7G_1G_2$$

由此得出

$$\Delta=1+(H_4G_1+H_2H_7G_2+H_4H_5H_6G_2+H_2H_3H_4H_5G_2)+H_2H_4H_7G_1G_2$$

(2) 前向通路共有三条

第一条 $X\to X_1\to X_2\to X_3\to X_4\to Y$

$$g_1=H_1H_2H_3H_4H_5$$

没有与第一条通路不接触的环路，所以

$$\Delta_1=1$$

第二条 $X\to X_1\to X_3\to X_4\to Y$

$$g_2=H_1H_6H_4H_5$$

没有与第二条通路不接触的环路，所以

$$\Delta_2=1$$

第三条 $X\to X_1\to X_2\to Y$

$$g_3=H_1H_2H_7$$

与第三条通路不接触的环路是 L_1

$$\Delta_3=1+H_4G_1$$

最后得到系统的转移函数为

$$H=\frac{Y}{X}=\frac{H_1H_2H_3H_4H_5+H_1H_6H_4H_5+H_1H_2H_7(1+H_4G_1)}{1+H_4G_1+H_2H_7G_2+H_4H_5H_6G_2+H_2H_3H_4H_5G_2+H_2H_4H_7G_1G_2} \tag{11-82}$$

例 11－19 根据梅森公式求用下列转移函数表示的系统流图。

$$H(s)=\frac{b_0s^m+b_1s^{m-1}+\cdots+b_{m-1}s+b_m}{s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}\quad m<n \tag{11-83}$$

解 对于连续系统通常用积分器来模拟，因而把式(11－83)改写为

$$H(s)=\frac{\frac{b_0}{s^{n-m}}+\frac{b_1}{s^{n-m+1}}+\cdots+\frac{b_{m-1}}{s^{n-1}}+\frac{b_m}{s^n}}{1+\frac{a_1}{s}+\frac{a_2}{s^2}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{s^{n-1}}+\frac{a_n}{s^n}} \tag{11-84}$$

从流图的梅森公式来分析式(11－84),则分母可看成是 n 个环路组成的特征行列式,而且它们是互相接触的;分子部分看成($m+1$)条前向通路构成的增益,并且没有不接触的环路。这样就可以画出图11－41 的流图形式;根据流图转置的性质图11－42 也同样满足式(11－84)的转移函数。

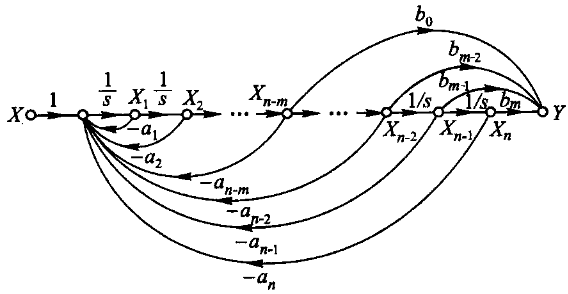


图 11－41　式(11－83)转移函数的流图表示

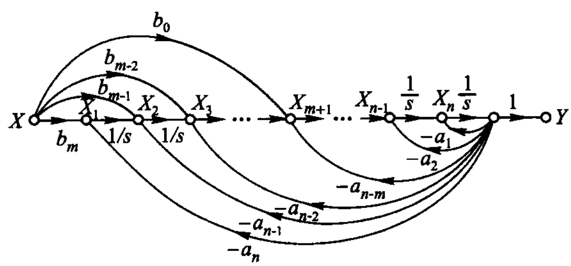


图 11－42　对图 11－41 表示的流图转置后的形式

回顾本节讨论可以看出:信号流图留给我们的印象不应局限于记忆一些公式和研究解题技巧,它的魅力要从更深层次来理解。当人们在繁琐的系统框图中难以解脱,并且无奈地依从列写方程式寻求计算结果时,梅森的方法冲破束缚,抓住研究对象中的主要矛盾,借助流图一目了然看清楚系统内部的主体结构和关键参数。仿此思路、触类旁通,它会启发我们在纷繁杂乱的事物面前拿出简化问题的方案。

另一方面,半个多世纪之前,当梅森取得这一研究工作的初步成果时,人们还不曾意识到信号流图的应用对于理解状态方程的建立和求解大有裨益。在稍

后的进一步讨论中读者必然会感受到它为我们带来的方便。

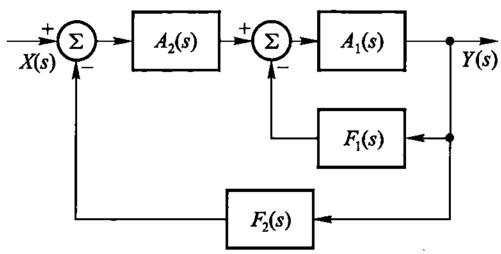
习　　题

11－1　若图 11－1 所示反馈系统中 $A(s)=\frac{1}{s+1}$，$F(s)=s-\beta$（β 为实数），为使系统稳定，求 β 值范围。

11－2　若上题中 $A(s)$ 改为 $A(s)=\frac{1}{s-1}$，其他条件不变，重复所问。

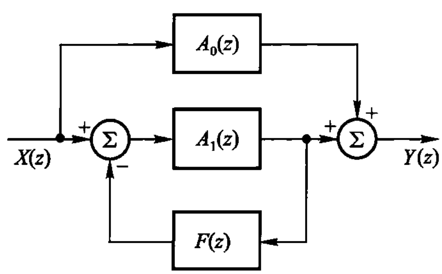
11－3　若图 11－2 所示反馈系统中 $A(z)=\frac{z}{z-\frac{1}{2}}$，$F(z)=1-\beta z^{-1}$（$\beta$ 为实数），为使系统稳定，求 β 值范围。

11－4　试写出题图 11－4 所示互联系统的系统函数 $H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}$ 的表达式。

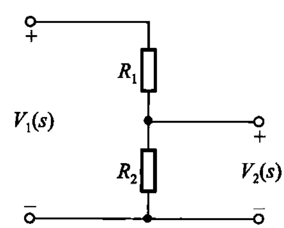


题图 11－4

11－5　试写出题图 11－5 所示互联系统的系统函数 $H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}$ 的表达式。



题图 11－5



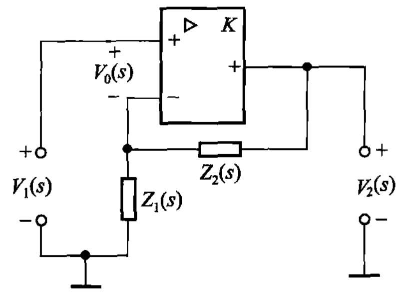
题图 11－6

11－6　电阻分压器如题图 11－6 所示，此电路可以看作负反馈系统，若以 $V_1(s)$ 作输入、$V_2(s)$ 作输出，画出与图11－1 对应的反馈系统框图，求 $A(s)$、$F(s)$。

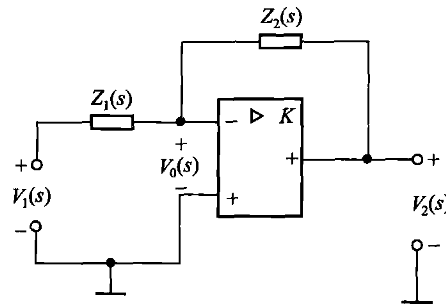
11－7　同相运算放大器电路如题图 11－7 所示，若以 $V_1(s)$ 作输入、$V_2(s)$ 作输出，画出与图11－1 对应的反馈系统框图，求 $A(s)$，$F(s)$。

11－8　反相运算放大器电路如题图11－8 所示，若以 $V_1(s)$ 作输入、$V_2(s)$ 作输出，画出与图

11－1类似的反馈系统框图(注意答案不是惟一的。)



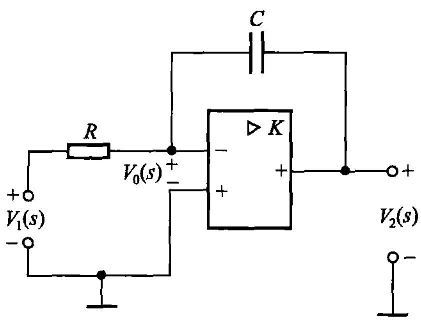
题图 11－7



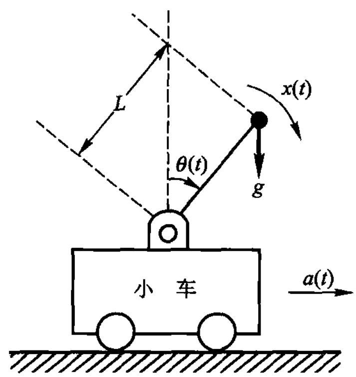
题图 11－8

11－9 若在上题中 $K \gg 1$,求证 $H(s)$可近似表示为 $H(s) \approx -\dfrac{Z_2(s)}{Z_1(s)}$。

11－10 利用运算放大器构成的积分器电路如题图11－10所示。此电路是题图11－8取 $Z_1(s)=R, Z_2(s)=\dfrac{1}{sC}$而得到的。利用该题结果证明这是一个近似的积分器电路,给出近似条件(K,R,C 参数之条件)。



题图 11－10



题图 11－11

11－11 在11.1节曾介绍的倒立摆系统重绘于题图11－11。图中,摆长为 L,不计长杆质量,末端小球质量为 m,$\theta(t)$是偏离垂线之角度,重力加速度为 g,$a(t)$是小车加速度,$x(t)$表示扰动(如风吹)引起的角加速度。质量沿垂直于杆方向的加速度 $L\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$应等于沿此方向施加之各种加速度之和,包括重力加速度、小车加速度和扰动加速度,按此要求建立的系统动态方程如下:

$$L\frac{\mathrm{d}^2\theta(t)}{\mathrm{d}t^2}=g\sin[\theta(t)]-a(t)\cos[\theta(t)]+Lx(t)$$

此模型为非线性微分方程，在摆处于垂直位置附近，即 $\theta(t)$很小的情况下，取如下近似：$\sin[\theta(t)]\approx\theta(t)$，$\cos[\theta(t)]\approx 1$，得到如下简化的线性方程：

$$L\frac{\mathrm{d}^2\theta(t)}{\mathrm{d}t^2}=g[\theta(t)]-a(t)+Lx(t)$$

(1)设$x(t)$为激励信号，$\theta(t)$是响应信号，若小车不动，即 $a(t)=0$，写出系统函数 $H(s)=\frac{\Theta(s)}{X(s)}$表达式，并讨论系统之稳定性。

(2)研究适当移动小车对稳定性的影响。假定随 $\theta(t)$之变化按比例反馈作用使小车产生加速度，即 $a(t)=K\theta(t)$，K 为比例系数。画出引入反馈后的系统方框图，并求此反馈系统的系统函数。讨论系统的稳定性(分为 $K<g$、$K=g$和 $K>g$ 三种情况)。

(3)改用比例－微分(PD)反馈控制，即

$$a(t)=K_1\theta(t)+K_2\frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t}$$

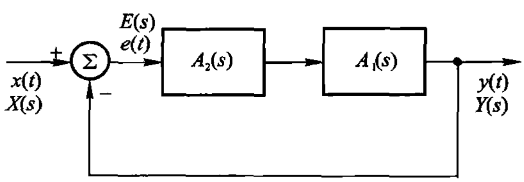
其中 K_1 和 K_2 都为正实系数。写出此反馈系统的系统函数，讨论为使系统稳定，K_1，K_2 应满足何种约束条件？

11－12　在题图 11－12 所示的跟踪系统中，$A_2(s)$作为补偿器用来改善 $A_1(s)$的性能。其作用是保证系统稳定，并使误差信号 $e(t)=x(t)-y(t)$随时间增长而衰减到零。

(1)若$A_1(s)=\frac{\alpha}{s+\alpha}$，$\alpha$ 为正实系数。选 $A_2(s)=K$(比例控制，K 为实系数)。求为使系统稳定 K 值应满足何种条件。分别求 $x(t)$为单位冲激或单位阶跃时，误差信号 $e(t)$的终值$\lim\limits_{t\to\infty}e(t)$。(提示：借助拉氏变换的终值定理。)

(2)若$A_1(s)$仍如(1)问，而 $A_2(s)$改为比例积分(PI)控制 $A_2(s)=K_1+\frac{K_2}{s}$。为使系统稳定，求实系数 K_1、K_2 的范围。求 $x(t)$为单位阶跃时误差信号$e(t)$的终值。比较以上二种情况下系统的跟踪性能。

(3)若$A_1(s)=\frac{1}{(s-1)^2}$，试讨论若 $A_2(s)$为 PI 控制时系统不稳定，而改用比例－积分－微分(PID)控制时 $A_2(s)=K_1+\frac{K_2}{s}+K_3s$，可使系统稳定。并讨论系统对阶跃信号作用的跟踪性能，求 $e(t)$的终值。



题图 11－12

11－13　反馈系统的开环系统函数表达式如下，分别画出其根轨迹图。

(1) $A(s)F(s)=\dfrac{K}{s+2}$　　$(K>0)$

(2) $A(s)F(s)=\dfrac{K}{(s+1)(s+3)}$　　$(K>0)$

11－14 反馈系统的开环系统函数表达式为

$$A(s)F(s)=\frac{K}{(s+1)(s+3)(s+5)} \qquad (K>0)$$

(1)求各条渐近线与实轴之交角；

(2)求各渐近线交点值；

(3)画出根轨迹。

11－15 反馈系统的开环系统函数表达式为

$$A(s)F(s)=\frac{K}{s(s+1)(s+4)} \qquad (K>0)$$

(1)画出根轨迹；

(2)为保证系统稳定求 K 值范围。

11－16 反馈系统的开环系统函数表达式为

$$A(s)F(s)=\frac{K(s+2)}{s^2+2s+4} \qquad (K>0)$$

(1)画出根轨迹；

(2)求两分支的交点值；

(3)要使闭环系统的冲激响应不呈现振荡，求 K 值范围。

11－17 在 11.3 节中关于根轨迹作图规则都是针对 $K>0$ 条件给出的，讨论 $K<0$ 应如何修改相应的规则。分别绘制以下各种情况的根轨迹。

(1) $A(s)F(s)=\dfrac{K}{s+2}$　　$(K<0)$

(2) $A(s)F(s)=\dfrac{K}{(s+1)(s+3)}$　　$(K<0)$

(3) $A(s)F(s)=\dfrac{K(s+2)}{s^2+2s+4}$　　$(K<0)$

11－18 在例 11－9 中根轨迹图形的一部分是以原点为圆心的圆，此特征方程的形式为 $z^2-bz+c+Kz=0$，其中 b,c,K 均为正实系数。试讨论在参数 b,c,K 之间满足何种约束的条件下此方程的根在 z 平面呈圆形，求圆的半径值。

11－19 若离散时间信号反馈系统的开环系统函数表达式为

$$A(z)F(z)=\frac{K\left(z-\frac{1}{4}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)}{z(z-p_1)(z-p_2)}$$

其中极点 $p_1=\frac{7}{8}e^{j\frac{\pi}{4}}, p_2=\frac{7}{8}e^{-j\frac{\pi}{4}}, K>0$。

(1)在 z 平面画根轨迹图；

(2)求为保证系统稳定的 K 值范围。

11－20 若反馈系统的开环系统函数表达式如下(都满足 $K>0$)，分别画出奈奎斯特图，并求为使系统稳定的 K 值范围。

(1) $A(s)F(s)=\dfrac{K}{s+1}$

(2) $A(s)F(s)=\dfrac{K}{(s+1)^2}$

(3) $A(s)F(s)=\dfrac{K}{(s+1)^4}$

(4) $A(s)F(s)=\dfrac{K}{s^2+2s+2}$

11－21 反馈系统的开环系统函数表达式如下(都满足 $K>0$)，分别画出奈奎斯特图，并求为使系统稳定的 K 值范围，注意本题中 $A(s)F(s)$在 s 右半平面内有极点(即 $n_p \neq 0$)。

(1) $A(s)F(s)=\dfrac{K}{s-1}$

(2) $A(s)F(s)=\dfrac{K(s+1)}{s^2-2s+2}$

11－22 如果给定的条件仍如习题 11－20，但限定 K 为负值($K<0$)，重复该题所问。

11－23 若反馈系统开环系统函数表达式为

$$A(s)F(s)=\frac{K}{s(s+1)(s+4)}$$

(1)画出奈奎斯特图；

(2)求使系统稳定的 K 值范围。

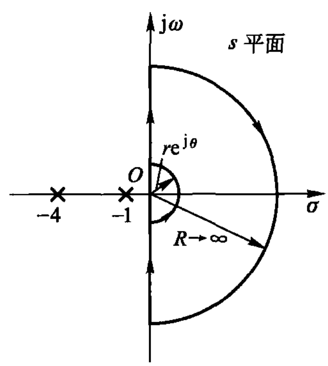
注意到本题特点是 $A(s)F(s)$函数的分母包含 s 项，也即在 s 平面 $j\omega$ 轴上 $\omega=0$ 处有一极点，当 s 沿 $j\omega$ 轴变化时需要从右侧绕过此点，为此，设置一个小半圆作为此段路径，如题图 11－23 所示。

小半圆上的 s 值为 $s=re^{j\theta}$，r 为任意小的半径值，θ 为辐角。当 s 变化沿此路径走过时，θ 由 $-\dfrac{\pi}{2}$ 变到 $\dfrac{\pi}{2}$。沿此半圆对应的 $A(s)F(s)$ 式当 $r\to 0$ 时近似为

$$A(s)F(s)=\frac{K}{re^{j\theta}(re^{j\theta}+1)(re^{j\theta}+4)}$$

$$\approx \frac{K}{4r}e^{-j\theta}$$

对应 s 沿小半圆变化，映射到 $A(j\omega)F(j\omega)$复轨迹图上为半径等于 $\dfrac{K}{4r}$ 的半圆。当 $r\to 0$ 时，此半圆的半径趋于 ∞。此即 $\omega\to 0$ 时的部分奈奎斯特图。请补足奈奎斯特图的其他部分图形，完成此题。



题图 11－23

11－24 若离散时间信号反馈系统开环系统函数表达式如下(都满足 $K>0$)，分别画出奈奎斯特图，并求使系统稳定的 K 值范围。

(1) $A(z)F(z)=\dfrac{K}{z-\dfrac{1}{2}}$

(2) $A(z)F(z)=\dfrac{K}{z-2}$

(3) $A(z)F(z)=\dfrac{K}{\left(z+\dfrac{1}{2}\right)\left(z-\dfrac{3}{2}\right)}$

11－25　若反馈系统的奈奎斯特图刚好经过$(-1+\mathrm{j}0)$点，此闭环系统函数的极点分布和冲激响应各有何特点？分别讨论连续系统和离散系统二种情况。

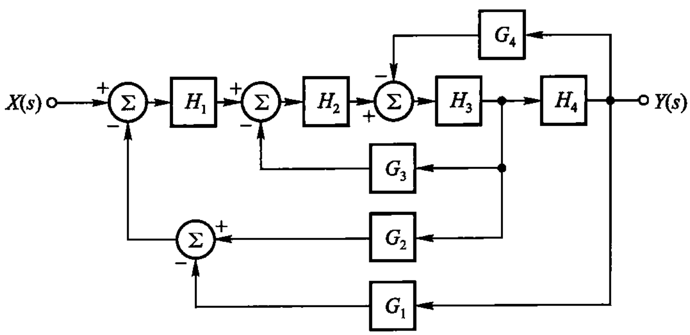
11－26　在反馈系统稳定性研究中，有时还应用"罗斯(Routh)判据(或准则)"，利用它可确定多项式的根是否都位于 s 左半平面。这里只说明对二、三阶多项式的判据。二阶多项式 $s^2+\alpha s+\beta$ 的根都位于左半平面的充分必要条件是所有项的系数具有相同的符号；对三阶多项式 $s^3+\alpha s^2+\beta s+\gamma$，除上述系数同号条件外，还应满足 $\alpha\beta>\gamma$。根据上述说明，试判断下列各多项式的根是否都位于 s 左半平面：

(1) s^2-3s+2　　(2) s^2+6s+2

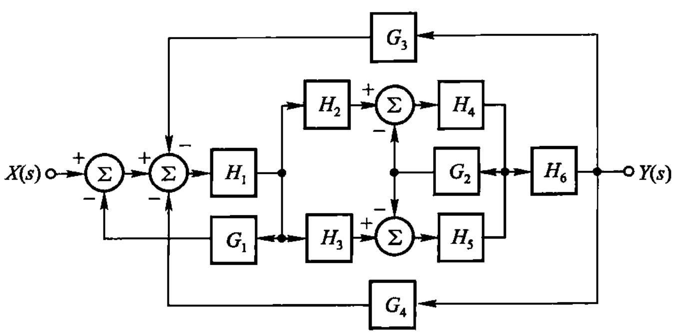
(3) $s^3+s^2-4s+30$　　(4) $s^3+s^2+4s+30$

(5) s^3+2s^2+3s+5　　(6) s^3+2s^2+3s

11－27　分别画出题图 11－27(a)和(b)所示各方框图的流图，并求各转移函数 $H(s)=\dfrac{Y(s)}{X(s)}$。



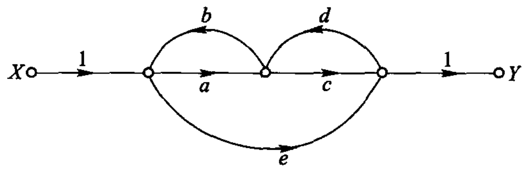
(a)



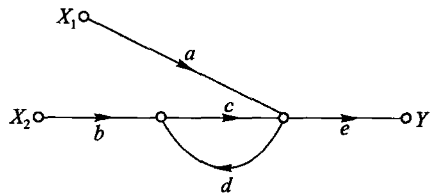
(b)

题图 11－27

11-28　分别求题图 11-28(a)和(b)流图所示系统的转移函数 $H(s)=\dfrac{Y(s)}{X(s)}$, $H_1(s)=\dfrac{Y(s)}{X_1(s)}$和 $H_2(s)=\dfrac{Y(s)}{X_2(s)}$。



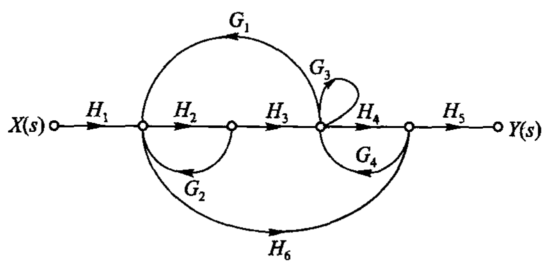
(a)



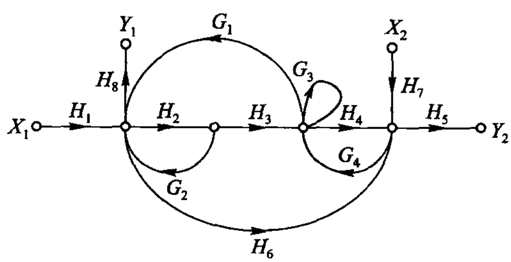
(b)

题图 11-28

11-29　分别求题图 11-29(a)和(b)流图所示系统的转移函数 $H(s)=\dfrac{Y(s)}{X(s)}$, $H_{11}(s)=$



(a)



(b)

题图 11-29

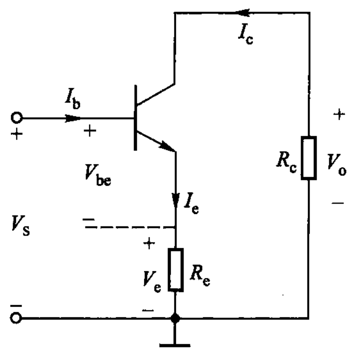
$\frac{Y_1(s)}{X_1(s)}, H_{21}(s)=\frac{Y_2(s)}{X_1(s)}, H_{12}(s)=\frac{Y_1(s)}{X_2(s)}, H_{22}(s)=\frac{Y_2(s)}{X_2(s)}$。

11-30 根据下面的源点与阱点间转移函数，画出系统的流图表示，在每一支路上标明相应的转移函数。

$$H=\frac{Y}{X}=\frac{ah(1-cf-dg)}{(1-be)(1-dg)-fc}$$

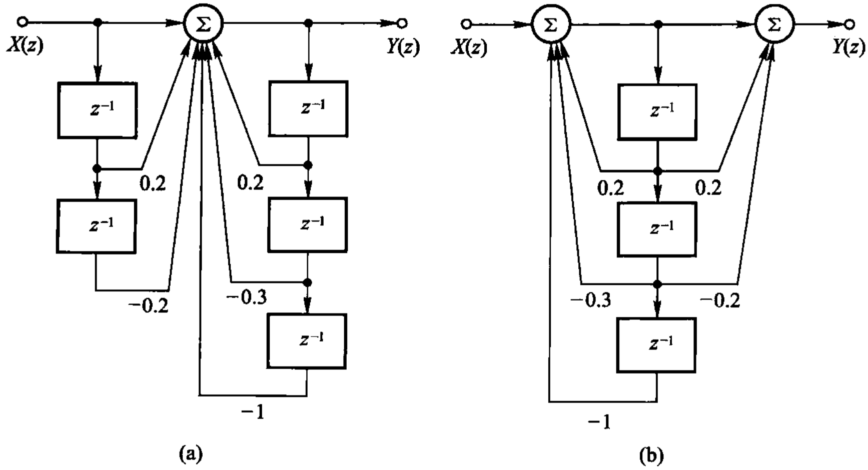
11-31 题图 11-31 示出射极有负反馈电阻的单管放大器，各电压、电流之间满足以下约束方程：$V_o=-R_cI_c, I_c=\beta I_b, I_b=\frac{V_{be}}{r_{be}}, V_{be}=V_S-V_e, V_e=R_eI_e, I_e=\frac{1+\beta}{\beta}I_c$。

画出此系统的信号流图，求转移函数$\frac{V_o}{V_S}$(即电压放大倍数)。



题图 11-31

11-32 题图 11-32 是数字滤波器的两种直接实现形式，利用信号流图证明两者具有相同的转移函数。(参看第十章图 10-41。)



题图 11-32

第十二章　系统的状态变量分析

12.1　引　　言

20 世纪 50 年代，经典的线性系统理论已经发展成熟，并在各种工程技术领域中得到广泛应用。按照经典理论，线性系统的基本模型以系统函数（或称转移函数、传递函数）描述，分析过程中着重运用频率响应特性的概念。通过本书前面各章的学习，读者已经熟悉了这些方法。然而，经典的线性系统理论具有明显的局限性，这种理论未能全面揭示系统的内部特性，也不容易有效地处理多输入－多输出系统，仅在着眼于系统外特性并且研究单输入－单输出系统时，才能显示其优点。

随着科学技术的进一步发展，迫切需要突破经典线性系统理论的上述局限性。到 20 世纪 50 至 60 年代，宇宙航行技术蓬勃兴起，在此背景的推动下，线性系统理论逐步从经典阶段过渡到现代阶段。现代系统与控制理论形成的重要标志之一是卡尔曼（R. E. Kalman）把状态空间方法引入到这一领域。此方法的主要特点是利用描述系统内部特性的状态变量取代仅描述系统外部特性的系统函数，并且将这种描述十分便捷地运用于多输入－多输出系统。在状态空间理论的基础上，卡尔曼进一步提出了系统的"可观测性"与"可控制性"两个重要概念，完整地揭示了系统的内部特性，从而促使控制系统分析与设计的指导原则产生了根本性的变革。此外，状态空间方法也成功地用来描述非线性系统或时变系统，并且易于借助计算机求解。

首先，从一个简单实例给出状态变量的初步概念。图 12－1 示出串联谐振电路，如果只关心其激励 $e(t)$ 与电容两端电压 $v_C(t)$ 之间的关系，则该系统可以用如下微分方程描述

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}v_C(t)+2\alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v_C(t)+\omega_0^2 v_C(t)=\omega_0^2 e(t) \qquad (12-1)$$

其中

$$\alpha=\frac{R}{2L}$$

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

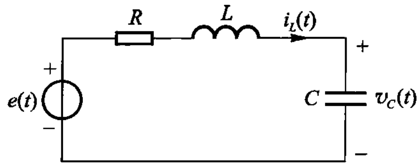


图 12－1 串联谐振电路

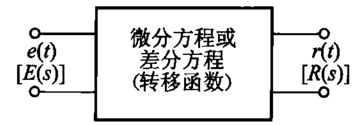


图 12－2 端口方法方框图

对于一般系统，一旦具体的物理设备用数学模型表示以后，就不再关心其内部变化情况，而只对其中输出的物理量 $r(t)$ 感兴趣，这时可以用图 12－2 所示的系统模型来研究各种激励信号 $e(t)$ 所引起的不同响应 $r(t)$。像这样研究系统的方法通常称为端口方法或输入－输出描述法。

对于图 12－1 所示电路，如果不仅希望了解电容上的电压 $v_C(t)$，而且希望知道在 $e(t)$ 的作用下，电感中电流 $i_L(t)$ 的变化情况，这时可以列出方程

$$Ri_L(t)+L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i_L(t)+v_C(t)=e(t) \tag{12-2}$$

及

$$v_C(t)=\frac{1}{C}\int i_L(t)\mathrm{d}t$$

或

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v_C(t)=\frac{1}{C}i_L(t) \tag{12-3}$$

上列两式可以写成

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i_L(t)=-\dfrac{R}{L}i_L(t)-\dfrac{1}{L}v_C(t)+\dfrac{1}{L}e(t)\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v_C(t)=\dfrac{1}{C}i_L(t)\end{cases} \tag{12-4}$$

这是以 $i_L(t)$ 和 $v_C(t)$ 作为变量的一阶微分联立方程组。对于图 12－1 所示的串联谐振电路只要知道 $i_L(t)$ 及 $v_C(t)$ 的初始情况及加入的 $e(t)$ 情况，即可完全确定电路的全部行为。这样描述系统的方法称为系统的状态变量或状态空间分析法，其中 $i_L(t)$ 及 $v_C(t)$ 即为串联谐振电路的状态变量。方程组(12－4)即为状态方程。

在状态空间分析方法中，将状态方程以矢量和矩阵形式表示，于是式(12－4)可写作

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dfrac{R}{L} & -\dfrac{1}{L}\\[2ex]\dfrac{1}{C} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_L(t)\\v_C(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{1}{L}\\[2ex]0\end{bmatrix}[e(t)] \tag{12-5}$$

实际上,电路的输出信号可能由多个状态变量以及输入信号的作用组合而成,于是还需要列写所谓“输出方程”。对于图 12－1 所示电路,若以 $r(t)$表示输出信号,输出方程的矩阵形式相当简单,可写作

$$r(t)=[0,1]\begin{bmatrix}i_L(t)\\ v_C(t)\end{bmatrix} \tag{12-6}$$

当系统的阶次较高因而状态变量数目较多或系统具有多输入－多输出信号时,描述系统的方程形式仍如式(12－5)和式(12－6),只是矢量或矩阵的维数有所增加。

下面给出系统状态变量分析法中的几个名词定义。

状态 对于一个动态系统的状态是表示系统的一组最少变量(被称为状态变量),只要知道 $t=t_0$时这组变量和 $t\geqslant t_0$时的输入,那么就能完全确定系统在任何时间 $t\geqslant t_0$的行为。

状态变量 能够表示系统状态的那些变量称为状态变量。例如图 12－1 中的 $i_L(t)$和 $v_C(t)$。

状态矢量 能够完全描述一个系统行为的 k 个状态变量,可以看作矢量 $\boldsymbol{\lambda}(t)$的各个分量的坐标。例如图 12－1 中的状态变量 $i_L(t)$和 $v_C(t)$可以看作二维矢量 $\boldsymbol{\lambda}(t)=\begin{bmatrix}\lambda_1(t)\\ \lambda_2(t)\end{bmatrix}$的两个分量 $\lambda_1(t)$和 $\lambda_2(t)$的坐标。$\boldsymbol{\lambda}(t)$即为状态矢量。

状态空间 状态矢量 $\boldsymbol{\lambda}(t)$所在的空间。

状态轨迹 在状态空间中状态矢量端点随时间变化而描出的路径称为状态轨迹。

例如图 12－1 所示电路,取系统的起始状态为零,即 $i_L(0_-)=0$,$v_C(0_-)=0$,激励电压为 $e(t)=Eu(t)$。若选电路中的 $R=2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$,则可以解出 $i_L(t)$和 $v_C(t)$为

$$\begin{cases}i_L(t)=\dfrac{E}{L}t\mathrm{e}^{-\omega_0 t}\\ v_C(t)=E[1-\mathrm{e}^{-\omega_0 t}(\omega_0 t+1)]\end{cases}$$

其中

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

分别画出 $i_L(t)$和 $v_C(t)$随时间变化的图形如图 12－3 所示。如果把它画在以 $i_L(t)$和 $v_C(t)$为坐标的图中,以时间 t 作为参变量,给定某一时间 $t=t_0$,即有

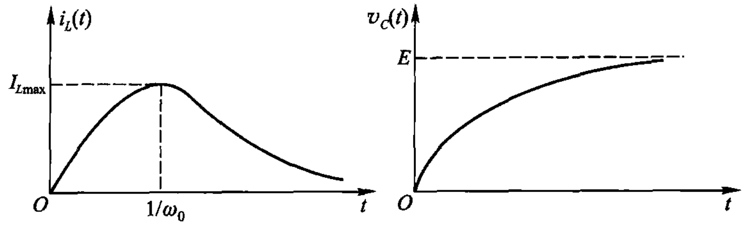


图 12－3 $i_L(t)$和 $v_C(t)$与时间 t 的关系

对应的一个点$[i_L(t_0), v_C(t_0)]$，这样即可画出状态矢量 $\boldsymbol{\lambda}(t)=\begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix}$在二维空间中矢量端点的轨迹图，如图 12－4 所示。

如果一个系统需要 k 个状态变量来描述，则状态矢量就是 k 维的矢量，对应的状态空间就是 k 维空间。

状态变量分析法对离散系统也是同样适用的，只不过在离散系统的情况改用一阶差分联立方程组来代替连续系统中的一阶微分联立方程组，详细的分析将在后面给出。

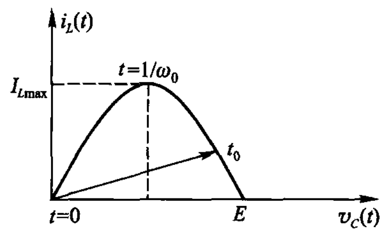


图 12－4 状态矢量 $\boldsymbol{\lambda}(t)=\begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix}$在二维空间中矢量端点轨迹图

用状态变量分析系统的优点在于：

(1) 便于研究系统内部的一些物理量在信号转换过程中的变化，这些物理量可以用状态矢量的一个分量表现出来，从而便于研究其变化规律。

(2) 系统的状态变量分析法与系统的复杂程度没有关系，复杂系统和简单系统的数学模型形式相似，都表示为一些状态变量的线性组合，这种以矢量和矩阵表示的数学模型特别适用于描述多输入－多输出系统。

(3) 状态变量分析法也适用于非线性或时变系统，因为一阶微分方程或差分方程是研究非线性和时变系统的有效办法。

(4) 状态方程的主要参数鲜明地表征了系统的关键性能。以系统状态变量参数为基础引出的系统可控制性和可观测性两个概念对于揭示系统内在特性具有重要意义，在控制系统分析与设计(如最优控制和最优估计)中得到广泛应用。此外，利用状态方程分析系统的稳定性也比较方便。

(5) 由于状态方程都是一阶微分方程或一阶差分方程，因而便于采用数值解法，为使用计算机分析系统提供了有效的途径。

状态空间方法除应用于电网络分析问题之外，在各种控制理论与工程领域中得到非常广泛的应用，它已成为控制系统分析与设计中最重要、最有效的方法。这些领域包括工程控制理论、生物控制理论、经济控制理论以及社会控制理论等。具体的应用实例如宇宙航行系统、生态平衡与物种竞争、宏观经济动态模型、人口发展、治疗吸毒计划实施的人口动力学等。

研究系统的状态变量需要具有初步的反馈理论知识。在第四章 4.11 节曾简要介绍了反馈系统分析的例题(例 4－25 和例 4－26)。另外，读者在模拟电子技术课程中对此也有初步认识。在前文第十一章集中研究了线性反馈系统的基本性能和基本分析方法，这将为学习本章做好准备。特别是 11.6 节的信号流图与本章联系密切，在以下各节将反复运用。

从下节开始将依次研究连续与离散时间系统状态方程的建立与求解，举出各方面的应用实例。在介绍状态矢量的线性变换原理之后，给出系统可控制性与可观测性的初步概念。必须指出，本书有关状态空间方法的讨论只是导引性的介绍，详细、深入的论述将在现代控制理论等课程中研究。

12.2　连续时间系统状态方程的建立

(一) 状态方程的一般形式和建立方法概述

一个动态连续系统的时域数学模型可利用信号的各阶导数来描述。作为连续系统的状态方程表现为状态变量的一阶微分联立方程组。如果系统是线性时不变的，则状态方程和输出方程是状态变量和输入信号的线性组合，即

$$\text{状态方程}\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\lambda_1(t)=a_{11}\lambda_1(t)+a_{12}\lambda_2(t)+\cdots+a_{1k}\lambda_k(t)+\\ \qquad b_{11}e_1(t)+b_{12}e_2(t)+\cdots+b_{1m}e_m(t)\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\lambda_2(t)=a_{21}\lambda_1(t)+a_{22}\lambda_2(t)+\cdots+a_{2k}\lambda_k(t)+\\ \qquad b_{21}e_1(t)+b_{22}e_2(t)+\cdots+b_{2m}e_m(t)\\ \quad\vdots\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\lambda_k(t)=a_{k1}\lambda_1(t)+a_{k2}\lambda_2(t)+\cdots+a_{kk}\lambda_k(t)+\\ \qquad b_{k1}e_1(t)+b_{k2}e_2(t)+\cdots+b_{km}e_m(t)\end{cases}\tag{12-7}$$

$$
\text{输出方程}\begin{cases} r_1(t)=c_{11}\lambda_1(t)+c_{12}\lambda_2(t)+\cdots+c_{1k}\lambda_k(t)+\\ \qquad d_{11}e_1(t)+d_{12}e_2(t)+\cdots+d_{1m}e_m(t)\\ r_2(t)=c_{21}\lambda_1(t)+c_{22}\lambda_2(t)+\cdots+c_{2k}\lambda_k(t)+\\ \qquad d_{21}e_1(t)+d_{22}e_2(t)+\cdots+d_{2m}e_m(t)\\ \vdots\\ r_r(t)=c_{r1}\lambda_1(t)+c_{r2}\lambda_2(t)+\cdots+c_{rk}\lambda_k(t)+\\ \qquad d_{r1}e_1(t)+d_{r2}e_2(t)+\cdots+d_{rm}e_m(t) \end{cases} \tag{12-8}
$$

其中 $\lambda_1(t),\lambda_2(t),\cdots,\lambda_k(t)$为系统的 k 个状态变量。

$e_1(t),e_2(t),\cdots,e_m(t)$为系统的 m 个输入信号。

$r_1(t),r_2(t),\cdots,r_r(t)$为系统的 r 个输出信号。

如果用矢量矩阵形式可表示为

状态方程 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\lambda}_{k\times 1}(t)=\boldsymbol{A}_{k\times k}\boldsymbol{\lambda}_{k\times 1}(t)+\boldsymbol{B}_{k\times m}\boldsymbol{e}_{m\times 1}(t) \tag{12-9}$$

输出方程 $$\boldsymbol{r}_{r\times 1}(t)=\boldsymbol{C}_{r\times k}\boldsymbol{\lambda}_{k\times 1}(t)+\boldsymbol{D}_{r\times m}\boldsymbol{e}_{m\times 1}(t) \tag{12-10}$$

其中

$$
\boldsymbol{\lambda}(t)=\begin{bmatrix}\lambda_1(t)\\ \lambda_2(t)\\ \vdots\\ \lambda_k(t)\end{bmatrix} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\lambda}(t)=\begin{bmatrix}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\lambda_1(t)\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\lambda_2(t)\\ \vdots\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\lambda_k(t)\end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk}\end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{km}\end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k}\\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2k}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ c_{r1} & c_{r2} & \cdots & c_{rk}\end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1m}\\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2m}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ d_{r1} & d_{r2} & \cdots & d_{rm}\end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{r}(t)=\begin{bmatrix}r_1(t)\\ r_2(t)\\ \vdots\\ r_r(t)\end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{e}(t)=\begin{bmatrix}e_1(t)\\ e_2(t)\\ \vdots\\ e_m(t)\end{bmatrix}
$$

与上列数学表达式相对应,可画出系统状态方程和输出方程分析的示意结

构图,如图 12－5 所示。图中,$\frac{1}{p}$是积分环节,它的输入为$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\lambda}(t)$,输出为$\boldsymbol{\lambda}(t)$。若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 矩阵是 t 的函数,表明系统是线性时变的,对于线性时不变系统,$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 的各元素都为常数,不随 t 改变。

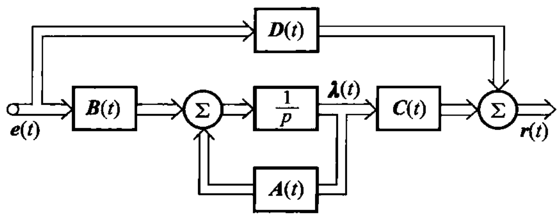


图 12－5　连续系统状态变量描述的结构图

观察状态方程式(12－9)和输出方程式(12－10)可以看出,被选择的状态变量具有这样的特性:每一状态变量的导数是所有状态变量和输入激励信号的函数;每一微分方程中只包含有一个状态变量对时间的导数;输出信号是状态变量和输入信号的函数。通常选择动态元件的输出作为状态变量,在连续系统中是选积分器的输出。

建立给定系统的状态方程的方法很多,这些方法大体上可划分为两大类型:直接法与间接法。其中,直接法主要应用于电路分析、电网络(如滤波器)的计算机辅助设计,而间接法则常见于控制系统研究。考虑到本书范围,在此着重研究后者。在本节第(二)部分,简要介绍用直接法建立电路状态方程的例子,然后讨论各种间接法,包括由输入输出方程建立状态方程、由系统框图(或信号流图)建立状态方程以及由系统函数或传输算子方程建立状态方程等方法。

(二) 由电路图直接建立状态方程

为建立电路的状态方程,先要选定状态变量,通常选电容两端电压和流经电感的电流为状态变量,有时也选电容电荷与电感磁链。

状态变量的个数即式(12－9)中的 k 等于系统的阶数。必须注意,所选定的每个状态变量都应当是独立变量。图 12－6 示例给出几个电容互连的电路,我们来讨论此时独立变量的选取原则。其中,图 12－6(a)将电压源 V_S 接到相互串联电容的两端,这两个电容上的电压不独立,只能选择其中之一为状态变量。而图 12－6(b)中任一电容电压都受到其余两电容电压值的约束,若要选取电容电压为状态变量,它们之中只有两个是独立的。图 12－7 示出几个电感互连的电路,此时同样要注意它们的独立变量选取规律。按照电路对偶原理容易看出,图 12－7(a)由于电流源 I_S 的约束作用,只能选一个电感电流作为独立的状态变量,而图 12－7(b)若要选取电感电流作状态变量,三个电流之中只有两

个是独立的。

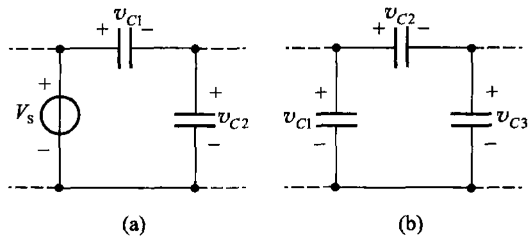


图 12－6 电容与电压源互连以及电容互连的回路

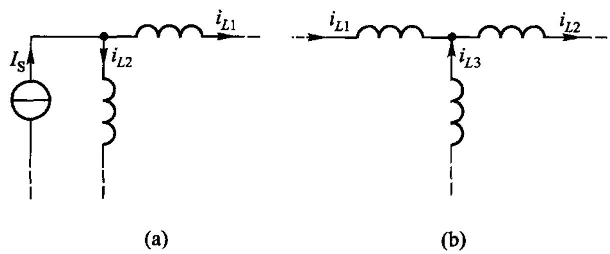


图 12－7 电感与电流源互连以及电感互连的结点

在选定状态变量之后，即可利用 KCL 和 KVL 列写电路方程，经化简消去一些不需要的变量，只留下状态变量和输入信号经整理给出状态方程。

例 12－1 给定图 12－8 的电路，列写电路的状态方程，若输出信号为电压 $r(t)$，列写输出方程。

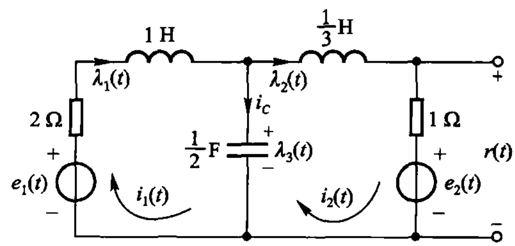


图 12－8 例 12－1 的电路

解 选电感中电流和电容两端电压作为状态变量，则有

$$\lambda_1(t)=i_1(t)$$
$$\lambda_2(t)=i_2(t)$$
$$\lambda_3(t)=v_C(t)=\frac{1}{C}\int i_C(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{C}\int[i_1(t)-i_2(t)]\mathrm{d}t \tag{12-11}$$

列写图 12－8 的回路方程

$$\begin{cases}2i_1(t)+\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i_1(t)+2\int[i_1(t)-i_2(t)]\mathrm{d}t=e_1(t)\\ i_2(t)+\dfrac{1}{3}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i_2(t)+2\int[i_2(t)-i_1(t)]\mathrm{d}t=-e_2(t)\end{cases} \tag{12-12}$$

把式(12－11)代入式(12－12),省略状态变量函数中的符号 t,经整理得到

$$\begin{cases}\dot{\lambda}_1=-2\lambda_1-\lambda_3+e_1(t)\\ \dot{\lambda}_2=-3\lambda_2+3\lambda_3-3e_2(t)\\ \dot{\lambda}_3=2\lambda_1-2\lambda_2\end{cases}$$

其中 $\dot{\lambda}=\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}$,表示成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix}\dot{\lambda}_1\\ \dot{\lambda}_2\\ \dot{\lambda}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&0&-1\\0&-3&3\\2&-2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\0&-3\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e_1(t)\\ e_2(t)\end{bmatrix} \tag{12-13}$$

容易写出输出电压 $r(t)$表达式为

$$r(t)=\lambda_2(t)+e_2(t) \tag{12-14}$$

表示成矩阵形式即输出方程为

$$r(t)=[0,1,0]\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{bmatrix}+[0,1]\begin{bmatrix}e_1(t)\\ e_2(t)\end{bmatrix} \tag{12-15}$$

对于比较简单的电路,用上述直观的方法容易列写状态方程。当电路结构相对复杂时,需要利用其他方法,这些方法往往要借助计算机辅助设计(CAD)技术。在电路(或电路分析)课程与教材中对此有初步介绍,详细、深入的研究可参看电路计算机辅助设计方面的教材或专著。

必须指出,连续时间系统状态方程的建立不仅应用于电路分析或设计,在许多科学与技术领域之中都已得到广泛应用,下面举出一个在生态控制研究中利用状态方程的例子。

例 12－2　考虑一种描述生态控制的状态方程模型。

为了研究两种细菌生存竞争的规律可建立连续时间系统的状态方程。若两种细菌在 t 时刻的数量分别为$\lambda_1(t)$和 $\lambda_2(t)$,它们对时间的导数分别为$\dot{\lambda}_1(t)$和 $\dot{\lambda}_2(t)$,这反映了繁殖速率。设 α_{11},α_{22}表示两物种的自身繁殖系数,而 α_{12}和

α_{21}为二者相互竞争系数。考虑人为加入一定的药物作用 $e(t)$，且利用 β_1和 β_2表示药品杀伤系数。综合上述要求可建立两个联立的非线性微分方程

$$\begin{cases}\dot{\lambda}_1=\alpha_{11}\lambda_1-\alpha_{12}\lambda_1\lambda_2-\beta_1 e(t)\\ \dot{\lambda}_2=\alpha_{22}\lambda_2-\alpha_{21}\lambda_1\lambda_2-\beta_2 e(t)\end{cases}$$

显然，这是一个非线性时不变的二阶状态方程。建立此方程可以帮助人们分析如何根据需要借助激励信号——药物来控制两种细菌的数量和繁殖速率。

下面讨论用间接法建立系统的状态方程。

(三) 由系统的输入－输出方程或流图建立状态方程

假定某一物理系统可用如下微分方程表示

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}r(t)+a_1\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}t^{k-1}}r(t)+\cdots+a_{k-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t)+a_k r(t)\\&=b_0\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}e(t)+b_1\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}t^{k-1}}e(t)+\cdots+b_{k-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e(t)+b_k e(t)\end{aligned} \tag{12-16}$$

表示成算子形式为

$$\begin{aligned}&(p^k+a_1p^{k-1}+\cdots+a_{k-1}p+a_k)r(t)\\&=(b_0p^k+b_1p^{k-1}+\cdots+b_{k-1}p+b_k)e(t)\end{aligned} \tag{12-17}$$

其传输算子为

$$H(p)=\frac{b_0p^k+b_1p^{k-1}+\cdots+b_{k-1}p+b_k}{p^k+a_1p^{k-1}+\cdots+a_{k-1}p+a_k} \tag{12-18}$$

为便于选择状态变量，把式(12－18)表示成

$$H(p)=\frac{b_0+b_1/p+\cdots+b_{k-1}/p^{k-1}+b_k/p^k}{1+a_1/p+\cdots+a_{k-1}/p^{k-1}+a_k/p^k} \tag{12-19}$$

这样当用积分器来实现该系统时，有图 12－9 的流图形式(参见例 11－19)。

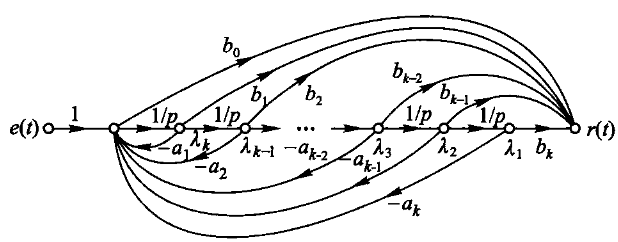


图 12－9　式(12－19)的流图表示

图 12－9 即是式(12－19)的流图表示，为列写状态方程，取每一积分器的输出作为状态变量，如图中所标的 $\lambda_1(t),\lambda_2(t),\cdots,\lambda_k(t)$，即

$$\begin{cases}\dot{\lambda}_1=\lambda_2\\ \dot{\lambda}_2=\lambda_3\\ \vdots\\ \dot{\lambda}_{k-1}=\lambda_k\\ \dot{\lambda}_k=-a_k\lambda_1-a_{k-1}\lambda_2-\cdots-a_2\lambda_{k-1}-a_1\lambda_k+e(t)\end{cases}$$

$$\begin{aligned}r(t)&=b_k\lambda_1+b_{k-1}\lambda_2+\cdots+b_2\lambda_{k-1}+b_1\lambda_k+\\&\quad b_0[-a_k\lambda_1-a_{k-1}\lambda_2-\cdots-a_2\lambda_{k-1}-a_1\lambda_k+e(t)]\\&=(b_k-a_kb_0)\lambda_1+(b_{k-1}-a_{k-1}b_0)\lambda_2+\cdots+\\&\quad(b_2-a_2b_0)\lambda_{k-1}+(b_1-a_1b_0)\lambda_k+b_0e(t)\end{aligned}\tag{12-20}$$

方程(12－20)即为对应式(12－16)系统的状态方程和输出方程，表示成矢量矩阵的形式

$$\begin{bmatrix}\dot{\lambda}_1\\ \dot{\lambda}_2\\ \vdots\\ \dot{\lambda}_{k-1}\\ \dot{\lambda}_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\-a_k&-a_{k-1}&-a_{k-2}&\cdots&-a_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_{k-1}\\ \lambda_k\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\1\end{bmatrix}e(t)\tag{12-21}$$

$$r(t)=[(b_k-a_kb_0),(b_{k-1}-a_{k-1}b_0),\cdots,(b_2-a_2b_0),(b_1-a_1b_0)]\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_{k-1}\\ \lambda_k\end{bmatrix}+b_0e(t)$$

或简化表示成

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t)=\boldsymbol{A\lambda}(t)+\boldsymbol{B}e(t)\\ r(t)=\boldsymbol{C\lambda}(t)+\boldsymbol{D}e(t)\end{cases}\tag{12-22}$$

对应的 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 矩阵分别为

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\-a_k&-a_{k-1}&-a_{k-2}&\cdots&-a_1\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\1\end{bmatrix}\\&\boldsymbol{C}=[(b_k-a_kb_0),(b_{k-1}-a_{k-1}b_0),\cdots,(b_2-a_2b_0),(b_1-a_1b_0)]\\&\boldsymbol{D}=b_0\end{aligned}\tag{12-23}$$

式(12-21)是一般形式。对应式(12-16)的不同输入情况,**A**、**B** 矩阵是相同的,**C**、**D** 矩阵有可能不同。

例如式(12-16)方程的右端只包含输入信号 $e(t)$,而不包含其任何阶导数,即

$$\frac{d^k}{dt^k}r(t)+a_1\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}r(t)+\cdots+a_{k-1}\frac{d}{dt}r(t)+a_kr(t)=e(t) \qquad (12-24)$$

此时,由于 $b_k=1$,其他 b 系数都为 0,因而

$$\boldsymbol{C}=[1,0,\cdots,0] \qquad \boldsymbol{D}=0 \qquad (12-25)$$

而矩阵 **A**,**B** 仍如式(12-23)。

如果式(12-16)方程的右端只包含输入信号的 m 阶及低于 m 阶导数($m<k$),即

$$\frac{d^k}{dt^k}r(t)+a_1\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}r(t)+\cdots+a_{k-1}\frac{d}{dt}r(t)+a_kr(t)$$
$$=b_{k-m}\frac{d^m}{dt^m}e(t)+b_{k-(m-1)}\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}e(t)+\cdots+b_{k-1}\frac{d}{dt}e(t)+b_ke(t) \qquad (12-26)$$

此时,矩阵 **A**,**B** 仍不变,而矩阵 **C**,**D** 分别为

$$\boldsymbol{C}=[b_k,b_{k-1},\cdots,b_{k-m},0,\cdots,0] \qquad (12-27)$$
$$\boldsymbol{D}=0$$

按流图转置性质,把式(12-16)对应的流图(图 12-9)进行转置可以得到同一系统的另一种流图结构,从而建立另一种形式的状态方程(相当于 11.6 节中的图11-41与图 11-42 的相互转置关系)。这表明,对于给定的系统状态变量的选择并非惟一。

(四)将传输算子表达式(或系统函数)分解 建立状态方程

将式(12-18)的分母分解因式,可以对应构成并联或串联形式的流图结构,这样又可构成不同形式的状态方程,下面通过几个典型实例来介绍这种方法。

例 12-3 将下示 $H(p)$ 表达式分解,用流图的并联结构形式建立状态方程

$$H(p)=\frac{p+4}{p^3+6p^2+11p+6}$$

解 把给定的 $H(p)$ 表达式作部分分式展开得到

$$H(p)=\frac{p+4}{p^3+6p^2+11p+6}=\frac{p+4}{(p+1)(p+2)(p+3)}$$
$$=\frac{3/2}{p+1}+\frac{-2}{p+2}+\frac{1/2}{p+3}$$
$$=H_1(p)+H_2(p)+H_3(p)$$

其中每一个传输算子的标准形式为

$$H_i(p)=\frac{\beta_i}{p+\alpha_i} \tag{12-28}$$

表示成流图即为图 12-10。

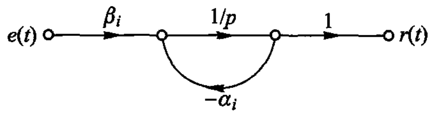


图 12-10 式(12-28)的流图表示

这样,$H(p)$的流图形式可表示为图 12-11。

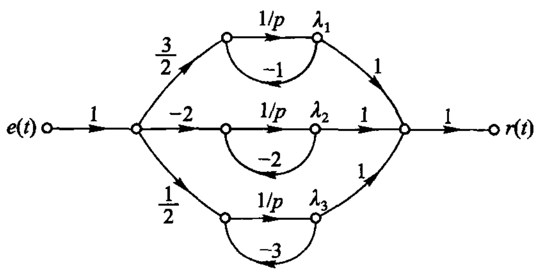


图 12-11 例 12-3 的流图形式

仍取积分器的输出为状态变量,则有

$$\begin{cases}\dot{\lambda}_1=-\lambda_1+\dfrac{3}{2}e(t)\\ \dot{\lambda}_2=-2\lambda_2-2e(t)\\ \dot{\lambda}_3=-3\lambda_3+\dfrac{1}{2}e(t)\end{cases}$$

$$r(t)=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 \tag{12-29}$$

表示成矩阵形式

$$\begin{bmatrix}\dot{\lambda}_1\\ \dot{\lambda}_2\\ \dot{\lambda}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-2&0\\0&0&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{3}{2}\\ -2\\ \dfrac{1}{2}\end{bmatrix}e(t)$$

$$r(t)=[1,1,1]\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{bmatrix} \tag{12-30}$$

从式(12－30)可以看出,这种并联结构形式导致 **A** 矩阵是对角阵,**A** 矩阵为对角阵形式的状态方程在控制理论研究中具有重要意义。

例 12－4 把例 12－3 表示为串联结构形式的状态方程。

解 把例 12－3 的 $H(p)$表达式作因式分解

$$H(p)=\left(\frac{1}{p+1}\right)\left(\frac{p+4}{p+2}\right)\left(\frac{1}{p+3}\right) \tag{12-31}$$

按图 12－10 画成流图形式,如图 12－12 所示。

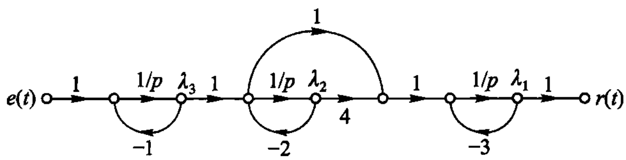


图 12－12 串联结构的流图形式

选积分器输出为状态变量

$$\begin{cases}\dot{\lambda}_1=-3\lambda_1+4\lambda_2+(\lambda_3-2\lambda_2)=-3\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3\\ \dot{\lambda}_2=-2\lambda_2+\lambda_3\\ \dot{\lambda}_3=-\lambda_3+e(t)\end{cases}$$

$$r(t)=\lambda_1$$

或

$$\begin{bmatrix}\dot{\lambda}_1\\ \dot{\lambda}_2\\ \dot{\lambda}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 2 & 1\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}e(t)$$

$$r(t)=[1,0,0]\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{bmatrix} \tag{12-32}$$

由式(12－32)可以看出,**A** 矩阵是三角阵,而对角元素为系统的特征根。

下面讨论在 $H(p)$表达式分母因子中出现重根的情况。

例 12－5 用并联结构形式表示下式为状态方程的形式

$$H(p)=\frac{p+4}{(p+1)^3(p+2)(p+3)} \tag{12-33}$$

解 用并联结构形式表示时,对式(12－33)用部分分式展开

$$H(p)=\frac{3/2}{(p+1)^3}+\frac{-7/4}{(p+1)^2}+\frac{15/8}{(p+1)}+\frac{-2}{(p+2)}+\frac{1/8}{(p+3)} \tag{12-34}$$

对应式(12－34)的流图结构形式如图 12－13 所示。

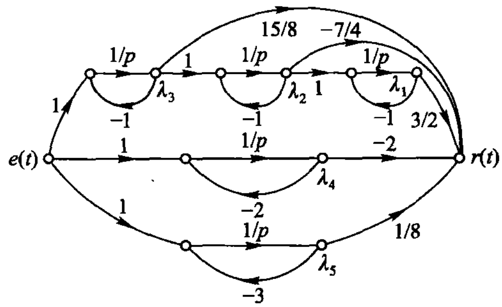


图 12－13 式(12－34)的流图形式

选积分器输出为状态变量

$$\begin{cases}\dot{\lambda}_1=-\lambda_1+\lambda_2\\ \dot{\lambda}_2=-\lambda_2+\lambda_3\\ \dot{\lambda}_3=-\lambda_3+e(t)\\ \dot{\lambda}_4=-2\lambda_4+e(t)\\ \dot{\lambda}_5=-3\lambda_5+e(t)\end{cases}$$

$$r(t)=\frac{3}{2}\lambda_1-\frac{7}{4}\lambda_2+\frac{15}{8}\lambda_3+(-2)\lambda_4+\frac{1}{8}\lambda_5 \qquad (12-35)$$

表示成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix}\dot{\lambda}_1\\ \dot{\lambda}_2\\ \dot{\lambda}_3\\ \dot{\lambda}_4\\ \dot{\lambda}_5\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{ccc:cc}-1&1&0&0&0\\0&-1&1&0&0\\0&0&-1&0&0\\ \hdashline 0&0&0&-2&0\\0&0&0&0&-3\end{array}\right]\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\\ \lambda_4\\ \lambda_5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\\1\end{bmatrix}e(t)$$

$$r(t)=\left[\frac{3}{2},-\frac{7}{4},\frac{15}{8},-2,\frac{1}{8}\right]\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\\ \lambda_4\\ \lambda_5\end{bmatrix} \qquad (12-36)$$

例 12－5 说明当系统传输算子用部分分式展开具有重根时，则 **A** 矩阵成为约当阵的形式。线性代数里已经证明任何矩阵都和一个约当阵相似(对角阵是

约当阵的一种特殊情况)，所以尽管状态变量选择不同，对同一系统而言不同形式的 $\boldsymbol{A}$ 矩阵都是相似的。12.6 节将进一步研究这一问题。

在本节中，由传输算子 $H(p)$ 建立状态方程的方法通常也适用于由系统函数 $H(s)$ 建立状态方程，此处不再重复说明。针对 $H(p)$ 讨论这一问题更具有一般性。此外，在本章最后还应看到，当研究 $H(s)$ 与系统状态方程之间的关系时，必须考虑系统的可观测性和可控制性，否则不能全面描述系统性能，这将是 12.7 节研究的重要内容。

12.3 连续时间系统状态方程的求解

可以利用时域方法或变换域方法求解状态方程，通常，对于一些低阶系统由解析式经人工计算求解时，变换域方法比较简便，而时域方法往往需要借助计算机求解。下面先给出用拉普拉斯变换法求解状态方程，然后介绍时域法，最后讨论由状态方程求系统函数的方法。

(一) 用拉普拉斯变换法求解状态方程

若给定方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\lambda}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\lambda}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{e}(t)\\ \boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{\lambda}(t)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{e}(t)\end{cases}\tag{12-37}$$

两边取拉氏变换

$$s\boldsymbol{\Lambda}(s)-\boldsymbol{\lambda}(0_-)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Lambda}(s)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{E}(s)$$

$$\boldsymbol{R}(s)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{\Lambda}(s)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{E}(s)\tag{12-38}$$

式中，$\boldsymbol{\lambda}(0_-)$为起始条件

$$\boldsymbol{\lambda}(0_-)=\begin{bmatrix}\lambda_1(0_-)\\ \lambda_2(0_-)\\ \vdots\\ \lambda_k(0_-)\end{bmatrix}$$

整理得

$$\begin{cases}\boldsymbol{\Lambda}(s)=(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{\lambda}(0_-)+(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{E}(s)\\ \boldsymbol{R}(s)=\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{\lambda}(0_-)+[\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}]\boldsymbol{E}(s)\end{cases}\tag{12-39}$$

因而时域表示式为

$$\begin{cases}\boldsymbol{\lambda}(t)=\mathscr{L}^{-1}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{\lambda}(0_-)]+\\ \qquad \mathscr{L}^{-1}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}]*\mathscr{L}^{-1}\boldsymbol{E}(s)\\ \boldsymbol{r}(t)=\underbrace{\boldsymbol{C}\mathscr{L}^{-1}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{\lambda}(0_-)]}_{\text{零输入解}}+\\ \qquad \underbrace{\{\boldsymbol{C}\mathscr{L}^{-1}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}]+\boldsymbol{D}\delta(t)\}*\mathscr{L}^{-1}\boldsymbol{E}(s)}_{\text{零状态解}}\end{cases} \tag{12-40}$$

由此结果可以看出，在计算过程中最关键的一步是求$(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$，下面举例说明。在时域求解方法中我们将进一步解释$(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$取拉普拉斯逆变换的意义。

例 12－6　已建立状态方程和输出方程为

$$\begin{bmatrix}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\lambda_1(t)\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\lambda_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1(t)\\ \lambda_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}u(t)$$

$$r(t)=\begin{bmatrix}-\frac{1}{4},1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1(t)\\ \lambda_2(t)\end{bmatrix}$$

起始条件为

$$\lambda_1(0_-)=1,\quad \lambda_2(0_-)=2$$

用拉氏变换法求响应 $r(t)$。

解

$$(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=s\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s-1 & 0\\ -1 & s+3\end{bmatrix}$$

由此求$(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$，这时需借助伴随矩阵 adj

$$\begin{aligned}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}&=\frac{\mathrm{adj}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})}{|s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|}\\ &=\frac{1}{(s-1)(s+3)}\begin{bmatrix}s+3 & 0\\ 1 & s-1\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}\frac{1}{s-1} & 0\\ \frac{1}{(s-1)(s+3)} & \frac{1}{s+3}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

将此结果代入式(12－39)可以得到零输入响应与零状态响应的拉氏变换式 $R_{zi}(s)$和 $R_{zs}(s)$分别为

$$R_{zi}(s)=\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{\lambda}(0_-)$$

$$= \left[-\frac{1}{4},1\right]\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s-1} & 0\\ \dfrac{1}{(s-1)(s+3)} & \dfrac{1}{s+3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

$$= \frac{7}{4}\cdot\frac{1}{(s+3)}$$

$$R_{zs}(s) = [\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}]E(s)$$

$$= \left[-\frac{1}{4},1\right]\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s-1} & 0\\ \dfrac{1}{(s-1)(s+3)} & \dfrac{1}{s+3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{s}$$

$$= \frac{1}{12}\left(\frac{1}{s+3}-\frac{1}{s}\right)$$

合并以上二式并求拉氏逆变换得到响应的时域解

$$r(t) = \left[\frac{7}{4}e^{-3t}+\frac{1}{12}(e^{-3t}-1)\right]u(t)$$

$$= \left(\frac{11}{6}e^{-3t}-\frac{1}{12}\right)u(t)$$

(二) 用时域法求解状态方程(矢量微分方程求解)

在时域求解方法中需要用到"矩阵指数",先给出矩阵指数 $e^{\boldsymbol{A}t}$ 的定义和主要性质,它的定义为

$$e^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}t+\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t^2+\cdots+\frac{1}{k!}\boldsymbol{A}^kt^k+\cdots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\boldsymbol{A}^kt^k \qquad (12-41)$$

式中 $\boldsymbol{A}$ 为 $k\times k$ 方阵,$e^{\boldsymbol{A}t}$ 也是一个 $k\times k$ 方阵。它的主要性质有

$$e^{\boldsymbol{A}t}e^{-\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{I} \qquad (12-42)$$

$$e^{\boldsymbol{A}t} = [e^{-\boldsymbol{A}t}]^{-1} \qquad (12-43)$$

$$\frac{d}{dt}e^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{A}e^{\boldsymbol{A}t} = e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{A} \qquad (12-44)$$

从直观认识容易接受这些结论,严格的证明见参考书目[2]。

下面对给定的状态方程进行时域求解,若已知

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\lambda}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\lambda}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{e}(t) \qquad (12-45)$$

并给定起始状态矢量

$$\boldsymbol{\lambda}(0_-) = \begin{bmatrix}\lambda_1(0_-)\\ \lambda_2(0_-)\\ \vdots\\ \lambda_k(0_-)\end{bmatrix} \qquad (12-46)$$

对式(12－45)两边左乘 e^{-At}，移项有

$$e^{-At}\frac{d}{dt}\boldsymbol{\lambda}(t)-e^{-At}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\lambda}(t)=e^{-At}\boldsymbol{B}\boldsymbol{e}(t) \tag{12-47}$$

化简得

$$\frac{d}{dt}e^{-At}\boldsymbol{\lambda}(t)=e^{-At}\boldsymbol{B}\boldsymbol{e}(t) \tag{12-48}$$

两边取积分，并考虑式(12－45)的起始条件，有

$$e^{-At}\boldsymbol{\lambda}(t)-\boldsymbol{\lambda}(0_-)=\int_{0_-}^{t}e^{-A\tau}\boldsymbol{B}\boldsymbol{e}(\tau)d\tau \tag{12-49}$$

对式(12－49)两边左乘 e^{At}，并考虑到

$$e^{At}e^{-At}=\boldsymbol{I} \tag{12-50}$$

可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\lambda}(t)&=e^{At}\boldsymbol{\lambda}(0_-)+\int_{0_-}^{t}e^{A(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{e}(\tau)d\tau\\&=e^{At}\boldsymbol{\lambda}(0_-)+e^{At}\boldsymbol{B}*\boldsymbol{e}(t)\end{aligned} \tag{12-51}$$

表示式(12－51)，即为方程(12－45)的一般解。将此结果代入输出方程得到 $r(t)$

$$\begin{aligned}r(t)&=\boldsymbol{C}\boldsymbol{\lambda}(t)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{e}(t)\\&=\boldsymbol{C}e^{At}\boldsymbol{\lambda}(0_-)+\int_{0_-}^{t}\boldsymbol{C}e^{A(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{e}(\tau)d\tau+\boldsymbol{D}\boldsymbol{e}(t)\\&=\underbrace{\boldsymbol{C}e^{At}\boldsymbol{\lambda}(0_-)}_{\text{零输入解}}+\underbrace{[\boldsymbol{C}e^{At}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}\delta(t)]*\boldsymbol{e}(t)}_{\text{零状态解}}\end{aligned} \tag{12-52}$$

将时域求解结果式(12－51)和式(12－52)与变换域求解结果式(12－40)相比较，不难发现 $(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$ 就是 e^{At} 的拉氏变换，即

$$e^{At}=\mathscr{L}^{-1}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}] \tag{12-53}$$

无论状态方程的解或输出方程的解都由两部分相加组成，第一部分是零输入解，由 $\boldsymbol{\lambda}(0_-)$ 引起，第二部分是零状态解，由激励信号 $\boldsymbol{e}(t)$ 引起。两部分的变化规律都与矩阵 e^{At} 有关，因此可以说 e^{At} 反映了系统状态变化的本质。e^{At} 称为“状态转移矩阵”(state transition matrix)，而它的拉氏变换 $(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$ 称为“特征矩阵”(characteristic matrix)。

至此，时域解的表达式虽已给出，而计算工作并未结束，为求得最终结果必须先求出 e^{At}，正如在变换域方法中先求 $(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$ 一样。当然，也可以用变换域方法由 $(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$ 取逆变换间接得到 e^{At}，除了这种方法之外，还有几种从时域直接求 e^{At} 的方法，计算过程繁琐，一般要借助计算机求解。限于本书篇幅，不再讨论。如有兴趣可查看参考书目[2]的 12.3 节。

(三) 由状态方程求系统函数 $H(s)$

当给定系统的状态方程时，可利用已知的 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ 矩阵表示系统转移函数$H(s)$，下面导出此关系式。

设给定状态方程

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = \boldsymbol{A\lambda}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{e}(t) \\ \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{C\lambda}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{e}(t) \end{cases} \tag{12-54}$$

其中 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ 为常数阵。

考虑到系统转移函数是在零起始状态下得到的，因此对式(12－54)两边取拉氏变换有

$$\begin{cases} s\boldsymbol{\Lambda}(s) = \boldsymbol{A\Lambda}(s) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{E}(s) \\ \boldsymbol{R}(s) = \boldsymbol{C\Lambda}(s) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{E}(s) \end{cases} \tag{12-55}$$

由式(12－55)的第一式得到

$$\boldsymbol{\Lambda}(s) = (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{E}(s)$$

代入式(12－55)的第二式，整理得

$$\boldsymbol{H}(s) = \frac{\boldsymbol{R}(s)}{\boldsymbol{E}(s)} = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D} \tag{12-56}$$

其中 $$(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \frac{\mathrm{adj}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})}{|s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}|}$$

此外 $H(s)$的一般表示式为

$$H(s) = \frac{b_0 s^k + b_1 s^{k-1} + \cdots + b_{k-1}s + b_k}{s^k + a_1 s^{k-1} + \cdots + a_{k-1}s + a_k} \tag{12-57}$$

比较式(12－56)和式(12－57)的分母可以看出 $|s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}|$ 即为 $H(s)$分母的特征多项式，所以称$(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}$为系统的特征矩阵。

将式(12－56)取逆变换即得系统的冲激响应 $h(t)$

$$\boldsymbol{h}(t) = \boldsymbol{C}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}\delta(t) \tag{12-58}$$

显然，此结果也可从式(12－52)的第二项(零状态解)令 $e(t) = \delta(t)$求得。

例 12－7 求图 12－14 所示系统的转移函数。

解 由图 12－14，设置状态变量 $\lambda_1(t)$和 $\lambda_2(t)$，则可以得出状态方程和输出方程为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\lambda_1 = -5\lambda_1 - \lambda_2 + 2e(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\lambda_2 = 3\lambda_1 - \lambda_2 + 5e(t) \end{cases}$$

$$r(t) = \lambda_1 + \lambda_2$$

由此得到

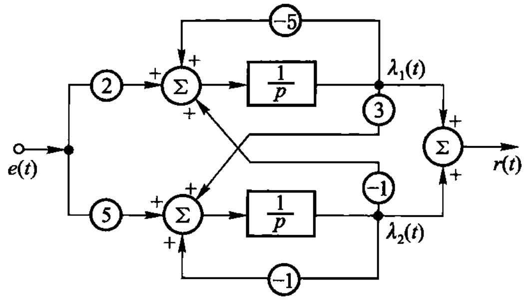


图 12－14　例 12－7 的系统

$$A=\begin{bmatrix}-5 & -1\\ 3 & -1\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}$$

$$C=[1,1]\qquad\qquad D=0$$

按式(12－56)先求特征矩阵

$$(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\begin{bmatrix}s+5 & 1\\ -3 & s+1\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\frac{1}{(s+2)(s+4)}\begin{bmatrix}s+1 & -1\\ 3 & s+5\end{bmatrix}$$

所以

$$H(s)=\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}$$

$$=[1,1]\frac{1}{(s+2)(s+4)}\begin{bmatrix}s+1 & -1\\ 3 & s+5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}$$

$$=\frac{7s+28}{(s+2)(s+4)}\tag{12-59}$$

如果系统具有 r 个输出，m 个输入，即

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{\lambda}}_{k\times1}(t)=\boldsymbol{A}_{k\times k}\boldsymbol{\lambda}_{k\times1}(t)+\boldsymbol{B}_{k\times m}\boldsymbol{e}_{m\times1}(t)\\ \boldsymbol{r}_{r\times1}(t)=\boldsymbol{C}_{r\times k}\boldsymbol{\lambda}_{k\times1}(t)+\boldsymbol{D}_{r\times m}\boldsymbol{e}_{m\times1}(t)\end{cases}\tag{12-60}$$

则按上面推导得到系统转移函数阵为

$$\boldsymbol{H}_{r\times m}(s)=\boldsymbol{C}_{r\times k}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}_{k\times k}\boldsymbol{B}_{k\times m}+\boldsymbol{D}_{r\times m}$$

$$=\begin{bmatrix}H_{11}(s) & H_{12}(s) & \cdots & H_{1m}(s)\\ H_{21}(s) & H_{22}(s) & \cdots & H_{2m}(s)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ H_{r1}(s) & H_{r2}(s) & \cdots & H_{rm}(s)\end{bmatrix}\tag{12-61}$$

式(12－61)中每一元素的物理意义可用下式表示

$$H_{ij}(s)=\left.\frac{\text{第 } i \text{ 个输出 } R_i(s) \text{ 中对第 } j \text{ 个输入的响应}}{\text{第 } j \text{ 个输入 } E_j(s)}\right|_{\text{其他输入量都为零}} \tag{12-62}$$

12.4 离散时间系统状态方程的建立

(一) 状态方程的一般形式和建立方法概述

对于一个动态的时域离散系统,它的数学模型是用各阶差分方程形式描述的。作为离散系统的状态方程表现为一阶差分联立方程组的形式,即

如果系统是线性时不变系统,则状态方程和输出方程是状态变量和输入信号的线性组合,即

$$\text{状态方程}\begin{cases}\lambda_1(n+1)=a_{11}\lambda_1(n)+a_{12}\lambda_2(n)+\cdots+a_{1k}\lambda_k(n)+\\ \qquad b_{11}x_1(n)+b_{12}x_2(n)+\cdots+b_{1m}x_m(n)\\ \lambda_2(n+1)=a_{21}\lambda_1(n)+a_{22}\lambda_2(n)+\cdots+a_{2k}\lambda_k(n)+\\ \qquad b_{21}x_1(n)+b_{22}x_2(n)+\cdots+b_{2m}x_m(n)\\ \quad\vdots\\ \lambda_k(n+1)=a_{k1}\lambda_1(n)+a_{k2}\lambda_2(n)+\cdots+a_{kk}\lambda_k(n)+\\ \qquad b_{k1}x_1(n)+b_{k2}x_2(n)+\cdots+b_{km}x_m(n)\end{cases} \tag{12-63}$$

$$\text{输出方程}\begin{cases}y_1(n)=c_{11}\lambda_1(n)+c_{12}\lambda_2(n)+\cdots+c_{1k}\lambda_k(n)+\\ \qquad d_{11}x_1(n)+d_{12}x_2(n)+\cdots+d_{1m}x_m(n)\\ y_2(n)=c_{21}\lambda_1(n)+c_{22}\lambda_2(n)+\cdots+c_{2k}\lambda_k(n)+\\ \qquad d_{21}x_1(n)+d_{22}x_2(n)+\cdots+d_{2m}x_m(n)\\ \quad\vdots\\ y_r(n)=c_{r1}\lambda_1(n)+c_{r2}\lambda_2(n)+\cdots+c_{rk}\lambda_k(n)+\\ \qquad d_{r1}x_1(n)+d_{r2}x_2(n)+\cdots+d_{rm}x_m(n)\end{cases} \tag{12-64}$$

其中 $\lambda_1(n),\lambda_2(n),\cdots,\lambda_k(n)$为系统的状态变量;
$x_1(n),x_2(n),\cdots,x_m(n)$为系统的 m 个输入信号;
$y_1(n),y_2(n),\cdots,y_r(n)$为系统的 r 个输出信号。

表示成矢量方程形式

$$\begin{cases}\text{状态方程} \quad \boldsymbol{\lambda}_{k\times 1}(n+1)=\boldsymbol{A}_{k\times k}\boldsymbol{\lambda}_{k\times 1}(n)+\boldsymbol{B}_{k\times m}\boldsymbol{x}_{m\times 1}(n)\\ \text{输出方程} \quad \boldsymbol{Y}_{r\times 1}(n)=\boldsymbol{C}_{r\times k}\boldsymbol{\lambda}_{k\times 1}(n)+\boldsymbol{D}_{r\times m}\boldsymbol{x}_{m\times 1}(n)\end{cases} \tag{12-65}$$

其中

$$\boldsymbol{\lambda}(n)=\begin{bmatrix}\lambda_1(n)\\ \lambda_2(n)\\ \vdots\\ \lambda_k(n)\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{km} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{r1} & c_{r2} & \cdots & c_{rk} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{D}=\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{r1} & d_{r2} & \cdots & d_{rm} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Y}(n)=\begin{bmatrix} y_1(n) \\ y_2(n) \\ \vdots \\ y_r(n) \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{X}(n)=\begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ \vdots \\ x_m(n) \end{bmatrix}.$$

观察离散系统的状态方程可以看出：$(n+1)$时刻的状态变量是 n 时刻状态变量和输入信号的函数。在离散系统中，动态元件是延时单元，因而状态变量常常取延时单元的输出。

与连续时间系统的分析类似，可以画出与图 12－5 类似的示意结构图，如图 12－15 所示。图中，$\frac{1}{E}$是延时单元，它的输入为 $\boldsymbol{\lambda}(n+1)$，输出是$\boldsymbol{\lambda}(n)$。若 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{D}$ 矩阵是 n 的函数，表明系统是线性时变的，对于线性时不变系统，$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{D}$ 各元素都为常数，不随 n 改变。

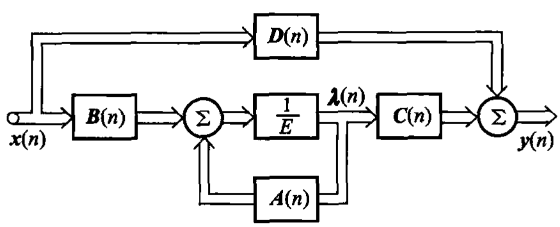


图 12－15　离散系统状态变量描述的结构图

建立离散时间系统状态方程的方法也可划分为直接法与间接法两类。而在数字滤波器类型的电子系统中，不存在与连续系统 R，L，C 元件组合相对应的电路形式，离散系统的实际结构就是由流图或框图形式给出的，此时，建立状态方程的方法与连续系统中的间接法对应。但是，对于各种非电领域的实际问题

仍需要直接按照研究对象的变化规律，建立状态方程。下面先讨论间接法，然后给出直接法的例子。

(二) 由系统的输入－输出差分方程建立状态方程

对于离散系统通常用下列 k 阶差分方程描述

$$\begin{aligned} & y(n)+a_1y(n-1)+a_2y(n-2)+\cdots+a_{k-1}y[n-(k-1)]+ \\ & \quad a_ky(n-k) \\ = & b_0x(n)+b_1x(n-1)+b_2x(n-2)+\cdots+ \\ & b_{k-1}x[n-(k-1)]+b_kx(n-k) \end{aligned} \tag{12-66}$$

如果表示成算子形式为

$$\begin{aligned} & (E^k+a_1E^{k-1}+a_2E^{k-2}+\cdots+a_{k-1}E+a_k)y(n) \\ = & (b_0E^k+b_1E^{k-1}+b_2E^{k-2}+\cdots+b_{k-1}E+b_k)x(n) \end{aligned} \tag{12-67}$$

传输算子为

$$H(E)=\frac{b_0E^k+b_1E^{k-1}+\cdots+b_{k-1}E+b_k}{E^k+a_1E^{k-1}+\cdots+a_{k-1}E+a_k} \tag{12-68}$$

考虑到离散系统用延时单元来实现，因而把式(12－68)改写为式(12－69)的形式

$$H(E)=\frac{b_0+\dfrac{b_1}{E}+\dfrac{b_2}{E^2}+\cdots+\dfrac{b_{k-1}}{E^{k-1}}+\dfrac{b_k}{E^k}}{1+\dfrac{a_1}{E}+\dfrac{a_2}{E^2}+\cdots+\dfrac{a_{k-1}}{E^{k-1}}+\dfrac{a_k}{E^k}} \tag{12-69}$$

按式(12－69)可以画出其流图形式如图 12－16 所示。

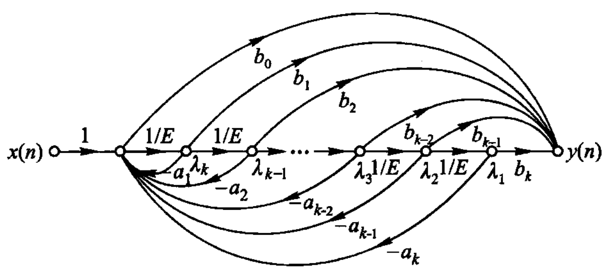


图 12－16 式(12－69)的流图表示

选延时单元输出作为状态变量，如图 12－16 中所标注的，则有

$$\begin{cases}\lambda_1(n+1)=\lambda_2(n)\\ \lambda_2(n+1)=\lambda_3(n)\\ \quad\vdots\\ \lambda_{k-1}(n+1)=\lambda_k(n)\\ \lambda_k(n+1)=-a_k\lambda_1(n)-a_{k-1}\lambda_2(n)-\cdots-\\ \qquad\qquad a_2\lambda_{k-1}(n)-a_1\lambda_k(n)+x(n)\end{cases}$$

$$\begin{aligned}y(n)=&b_k\lambda_1(n)+b_{k-1}\lambda_2(n)+\cdots+b_2\lambda_{k-1}(n)+b_1\lambda_k(n)+\\ &b_0[-a_k\lambda_1(n)-a_{k-1}\lambda_2(n)-\cdots-a_2\lambda_{k-1}(n)-\\ &a_1\lambda_k(n)+x(n)]\\ =&(b_k-a_kb_0)\lambda_1(n)+(b_{k-1}-a_{k-1}b_0)\lambda_2(n)+\cdots+\\ &(b_2-a_2b_0)\lambda_{k-1}(n)+(b_1-a_1b_0)\lambda_k(n)+b_0x(n)\end{aligned}\tag{12-70}$$

表示成矢量方程形式为

$$\begin{cases}\boldsymbol{\lambda}(n+1)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\lambda}(n)+\boldsymbol{B}x(n)\\ y(n)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{\lambda}(n)+\boldsymbol{D}x(n)\end{cases}\tag{12-71}$$

其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\-a_k&-a_{k-1}&-a_{k-2}&\cdots&-a_1\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}=[(b_k-a_kb_0),(b_{k-1}-a_{k-1}b_0),\cdots,(b_2-a_2b_0),(b_1-a_1b_0)]$$

$$\boldsymbol{D}=b_0$$

由此可见,根据离散系统的传输算子来列写系统的状态方程其步骤和结果与连续系统完全一样,只不过用延时单元来代替连续系统中的积分器。所以对离散系统其他形式的状态变量选择可以如连续系统采用的方法一样来做。在12.2节第(四)部分讨论的将传输算子表达式(或系统函数)分解建立状态方程的方法同样适用于离散时间系统。而 **A** 矩阵为约当阵的形式为最普遍和最重要的状态方程形式,对同一系统而言,不同形式的 **A** 矩阵都是相似的。这些结论对于连续与离散系统具有同样的重要意义。

(三) 由给定系统的方框图或流图建立状态方程

给定离散系统的方框图或流图,很容易建立系统的状态方程,只要取延时单元的输出作为状态变量即可,这里列举有两个输入和两个输出的例子以作说明。

例 12-8 给定离散系统的方框图或流图如图 12-17 所示,列出系统的状态方程。

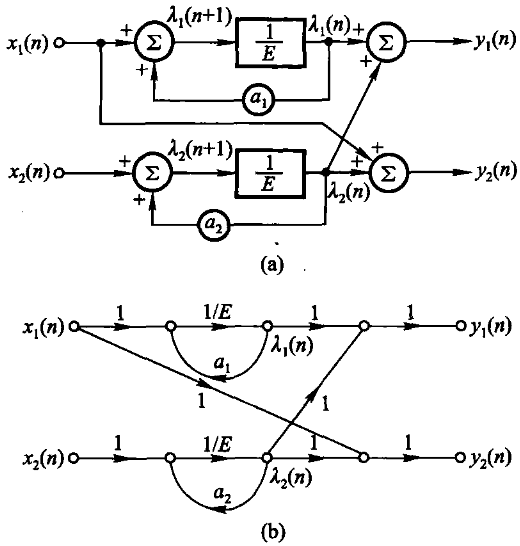


图 12－17 例 12－8 的系统

解 由方框图，其中有两个延时单元，因而可以设置两个状态变量，分别为 $\lambda_1(n)$ 和 $\lambda_2(n)$，这样即可写出状态方程与输出方程为

$$\begin{cases}\lambda_1(n+1)=a_1\lambda_1(n)+x_1(n)\\ \lambda_2(n+1)=a_2\lambda_2(n)+x_2(n)\end{cases}$$

$$\begin{cases}y_1(n)=\lambda_1(n)+\lambda_2(n)\\ y_2(n)=\lambda_2(n)+x_1(n)\end{cases}\tag{12-72}$$

表示成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix}\lambda_1(n+1)\\ \lambda_2(n+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1 & 0\\ 0 & a_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1(n)\\ \lambda_2(n)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(n)\\ x_2(n)\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}y_1(n)\\ y_2(n)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1(n)\\ \lambda_2(n)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(n)\\ x_2(n)\end{bmatrix}\tag{12-73}$$

本例中，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为对角形式，这就是无重根情况下的约当阵，若对该系统导出其他形式的状态方程，其 $\boldsymbol{A}$ 矩阵都应与此对角阵相似。

从以上有关连续系统和离散系统状态方程的分析可以看出，作为状态方程与输出方程，它们在形式上是相同的，这就是由输入量、输出量、状态变量以及联系它们之间关系的 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 矩阵所构成，即对连续系统状态方程和输出方程形式为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t)=\boldsymbol{A\lambda}(t)+\boldsymbol{Be}(t)\\ \boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{C\lambda}(t)+\boldsymbol{De}(t)\end{cases} \tag{12-74}$$

对离散系统状态方程和输出方程为

$$\begin{cases}\boldsymbol{\lambda}(n+1)=\boldsymbol{A\lambda}(n)+\boldsymbol{Bx}(n)\\ \boldsymbol{y}(n)=\boldsymbol{C\lambda}(n)+\boldsymbol{Dx}(n)\end{cases} \tag{12-75}$$

（四）由研究对象的运动规律直接建立状态方程

下面举出由研究对象的运动规律直接建立状态方程的实例。

例 12-9　某地区人口增长的简化动态模型。

首先把待研究地区的人口按年龄段分为若干个组，以序号 i 表示第 i 组，$i=0,1,2,\cdots,k-1$，共有 k 组。以 n 表示时间序号，时间周期按年计算。

设 $\lambda_i(n)$ 表示第 n 个时间周期内（n 年）第 i 组的人口数量，$\lambda_0(n)$ 和 $\lambda_{k-1}(n)$ 分别表示第 n 年的最小与最大年龄组人口数。

设 β_i 为存活系数，表示 $\lambda_{i+1}(n+1)$ 与 $\lambda_i(n)$ 之比，显然与人口存活情况有关，于是可建立如下关系式

$$\lambda_{i+1}(n+1)=\beta_i\lambda_i(n) \tag{12-76}$$

但是，对于最小年龄组上式不成立，$\lambda_0(n)$ 的数量变动取决于各年龄组生育的综合结果，设 α_i 为生育系数，可以建立如下方程

$$\lambda_0(n+1)=\alpha_0\lambda_0(n)+\alpha_1\lambda_1(n)+\alpha_2\lambda_2(n)+\cdots+\alpha_{k-1}\lambda_{k-1}(n) \tag{12-77}$$

综合上述分析，读者容易列出完整的状态方程式，此状态方程为 k 阶。

注意到在此方程式中没有激励信号，在给定起始条件后即可求解，结果中只包含零输入响应部分。为使上述分析付诸实际应用，需要根据该地区的历史状况和当前与未来的生态环境、社会环境以及生育习俗等多种因素正确选择 α,β 系数。利用此方程可以粗略预测该地区人口发展状况。人为调节相应的系数可以适当控制人口增长速度。

例 12-10　简单的宏观经济模型。

1971 年美国麻省理工学院（MIT）平杜克（R. S. Pindyck）在他的博士论文中提出了一种以状态方程描述的宏观经济模型，用来分析美国经济发展的动态特性，求解结果与实测参数比较接近。

这里简要介绍建立此模型的一些考虑，帮助我们初步认识如何从研究对象的变化规律建立状态方程。

下面给出一个简化的模型，共有六个状态变量，一个激励信号。

考虑以下四个经济变量

C：货物及服务的消费支出

P:货物及服务的价格水平

W:工资水平

M:货币供应

以 $n=0,1,2,\cdots$整数序号表示时间变量,时间间隔为一个季度(三个月),$n=0$为待研究时段的起点。

从经济学的各种规律和该地区或国家的实际状况可以给出描述以上四个变量相互关系的一组方程式如下

$$C(n)=\alpha_1 C(n-1)+\alpha_2 P(n-1)+\alpha_3 W(n-1)+\alpha_4 W(n-2) \tag{12-78}$$

$$P(n)=\beta_1 P(n-1)+\beta_2 W(n-1)+\beta_3 W(n-2)+\beta_4 M(n-1) \tag{12-79}$$

$$W(n)=\gamma_1 P(n-3)+\gamma_2 C(n-1) \tag{12-80}$$

式中 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\gamma_1$和 γ_2都是常数参量,假定它们不随 n 改变。

在式(12-79)中,当前的价格水平 $P(n)$取决于前一季度的价格水平 $P(n-1)$和过去的工资水平 $W(n-1)$、$W(n-2)$以及前一季度的总货币供应 $M(n-1)$,这是因为游资愈多价格愈高。对于式(12-78)也可作类似的说明。而在式(12-80)中,当前的工资水平 $W(n)$取决于九个月前的物价水平,间隔时间较长是由于劳资协商调整工作需要一定的延时;此外还受上一季度消费水平的影响。

选择 $C(n),P(n),W(n),W(n-1),P(n-1)$和 $P(n-2)$作为状态变量,分别以 $\lambda_1(n)$至 $\lambda_6(n)$表示,于是有

$$\boldsymbol{\lambda}(n)=\begin{bmatrix}\lambda_1(n)\\ \lambda_2(n)\\ \lambda_3(n)\\ \lambda_4(n)\\ \lambda_5(n)\\ \lambda_6(n)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C(n)\\ P(n)\\ W(n)\\ W(n-1)\\ P(n-1)\\ P(n-2)\end{bmatrix} \tag{12-81}$$

而货币供应 $M(n)$由政府政策控制,作为激励信号

$$X(n)=M(n)$$

至此,可以写出状态方程如下

$$\begin{bmatrix}\lambda_1(n)\\ \lambda_2(n)\\ \lambda_3(n)\\ \lambda_4(n)\\ \lambda_5(n)\\ \lambda_6(n)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & 0 & 0\\ 0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & 0 & 0\\ \gamma_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1(n-1)\\ \lambda_2(n-1)\\ \lambda_3(n-1)\\ \lambda_4(n-1)\\ \lambda_5(n-1)\\ \lambda_6(n-1)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \beta_4\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(n-1) \tag{12-82}$$

也可写作状态方程的一般形式

$$\boldsymbol{\lambda}(n)=\boldsymbol{A\lambda}(n-1)+\boldsymbol{Bx}(n-1) \tag{12-83}$$

由于此模型考虑的经济变量过于粗略，平杜克进一步给出了考虑较全面的模型，这时，除前述三个经济变量 C,P,W 之外，又引入了七个经济变量，共考虑十个变量的运动规律，增加的七个变量如下：

INR：非住宅投资

IR：住宅投资

IIN：商业库存变动

R：短期利率

RL：长期利率

UR：失业率

YD：纳税后的可支配收入

此外，激励信号除货币供应 M 之外，又增加了两个信号，它们是：

G：政府开支

TO：附加税收

仿照前面的方法，列出全部十个经济变量和三个激励信号的相互约束方程，平杜克建立了一种由 28 个状态变量和三个激励信号控制组成的状态方程。同时，还建立了此系统的输出方程，输出信号是国民生产总值 *GNP*，*GNP* 由四个状态变量和一个激励信号之和构成，表示式为

$$GNP=C+INR+IR+IIN+G \tag{12-84}$$

也即，*GNP* 由消费、非住宅与住宅投资、库存以及政府开支之和决定。

在本例分析中，所建立的状态方程都是线性时不变的，这与客观事物的实际规律尚有不少差距，因此，利用以上方法严格计算经济发展各变量的数据难以得到满意的预期结果，但是，作为定性分析，考察如何控制经济发展变化则具有一定的参考价值。

12.5 离散时间系统状态方程的求解

离散系统状态方程的求解和连续系统的求解方法类似,包括时域和变换域两种方法,下面分别介绍。

(一) 矢量差分方程的时域求解

离散系统的状态方程表示为

$$\boldsymbol{\lambda}(n+1)=\boldsymbol{A\lambda}(n)+\boldsymbol{B}x(n) \tag{12-85}$$

此式为一阶差分方程,可以应用迭代法求解。

设给定系统的起始状态为:在 $n=n_0$,有 $\boldsymbol{\lambda}(n_0)$,则按式(12-85)有

$$\boldsymbol{\lambda}(n_0+1)=\boldsymbol{A\lambda}(n_0)+\boldsymbol{B}x(n_0)$$

以下用迭代法,求(n_0+2),(n_0+3),$\cdots$,n 时刻的值:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\lambda}(n_0+1)&=\boldsymbol{A\lambda}(n_0)+\boldsymbol{B}x(n_0)\\
\boldsymbol{\lambda}(n_0+2)&=\boldsymbol{A\lambda}(n_0+1)+\boldsymbol{B}x(n_0+1)\\
&=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\lambda}(n_0)+\boldsymbol{AB}x(n_0)+\boldsymbol{B}x(n_0+1)\\
\boldsymbol{\lambda}(n_0+3)&=\boldsymbol{A\lambda}(n_0+2)+\boldsymbol{B}x(n_0+2)\\
&=\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\lambda}(n_0)+\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}x(n_0)+\boldsymbol{AB}x(n_0+1)+\boldsymbol{B}x(n_0+2)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

对于任意 n 值,当 $n>n_0$可归结为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\lambda}(n)&=\boldsymbol{A\lambda}(n-1)+\boldsymbol{B}x(n-1)\\
&=\boldsymbol{A}^{n-n_0}\boldsymbol{\lambda}(n_0)+\boldsymbol{A}^{n-n_0-1}\boldsymbol{B}x(n_0)+\\
&\quad\boldsymbol{A}^{n-n_0-2}\boldsymbol{B}x(n_0+1)+\cdots+\boldsymbol{B}x(n-1)\\
&=\boldsymbol{A}^{n-n_0}\boldsymbol{\lambda}(n_0)+\sum_{i=n_0}^{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1-i}\boldsymbol{B}x(i)
\end{aligned} \tag{12-86}$$

注意到在上式中,当 $n=n_0$时第二项不存在,此时的结果只由第一项决定,即 $\boldsymbol{\lambda}(n_0)$本身,只有当 $n>n_0$时,式(12-86)才可给出完整的 $\boldsymbol{\lambda}(n)$的结果。

如果起始时刻选 $n_0=0$,并将上述对 n 值的限制以阶跃信号的形式写入表达式,于是有

$$\boldsymbol{\lambda}(n)=\underbrace{\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\lambda}(0)u(n)}_{\text{零输入解}}+\underbrace{\left[\sum_{i=0}^{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1-i}\boldsymbol{B}x(i)\right]u(n-1)}_{\text{零状态解}} \tag{12-87}$$

还可解得输出为

$$y(n)=\boldsymbol{C\lambda}(n)+\boldsymbol{D}x(n)$$

$$= \underbrace{CA^n\lambda(0)u(n)}_{\text{零输入解}} + \underbrace{\left[\sum_{i=0}^{n-1} CA^{n-1-i}Bx(i)\right]u(n-1) + Dx(n)u(n)}_{\text{零状态解}} \tag{12-88}$$

式(12-87)和连续系统状态方程的情况相似,它由两部分组成:一是起始状态经转移后在 n 时刻造成的分量;另一是对$(n-1)$时刻以前的输入量的响应。它们分别称为零输入解和零状态解。其中 A^n 称为离散系统的状态转移矩阵,它与连续系统中的 e^{At} 含义类似。限于本书篇幅,我们仍按照与前文连续时间系统讲授内容相一致的原则,不讨论 A^n 的时域求解方法。稍后可以看到借助 z 变换方法求 A^n 的过程。在参考书目[2]的 12.5 节介绍 A^n 的时域解法,如有兴趣,可以查阅。另外,对于式(12-88)的分析与式(12-87)类似,不再重复。

(二) 离散系统状态方程的 z 变换解

和连续系统的拉氏变换方法类似,对于一些低阶系统,可由解析式经人工计算,在这种情况下离散系统的 z 变换方法也使状态方程求解显得容易一些。

由离散系统的状态方程和输出方程

$$\begin{cases} \lambda(n+1) = A\lambda(n) + Bx(n) \\ y(n) = C\lambda(n) + Dx(n) \end{cases} \tag{12-89}$$

两边取 z 变换

$$\begin{cases} z\Lambda(z) - z\lambda(0) = A\Lambda(z) + BX(z) \\ Y(z) = C\Lambda(z) + DX(z) \end{cases} \tag{12-90}$$

整理得到

$$\begin{cases} \Lambda(z) = (zI - A)^{-1}z\lambda(0) + (zI - A)^{-1}BX(z) \\ Y(z) = C(zI - A)^{-1}z\lambda(0) + C(zI - A)^{-1}BX(z) + DX(z) \end{cases} \tag{12-91}$$

取其逆变换即得时域表示式为

$$\begin{cases} \lambda(n) = \mathscr{Z}^{-1}[(zI - A)^{-1}z]\lambda(0) + \\ \qquad \mathscr{Z}^{-1}[(zI - A)^{-1}B] * \mathscr{Z}^{-1}[X(z)] \\ y(n) = \mathscr{Z}^{-1}[C(zI - A)^{-1}z]\lambda(0) + \\ \qquad \mathscr{Z}^{-1}[C(zI - A)^{-1}B + D] * \mathscr{Z}^{-1}[X(z)] \end{cases} \tag{12-92}$$

式(12-92)与式(12-87)和式(12-88)相比较可以得出,状态转移矩阵即为

$$A^n = \mathscr{Z}^{-1}[(zI - A)^{-1}z] = \mathscr{Z}^{-1}[(I - z^{-1}A)^{-1}] \tag{12-93}$$

或

$$A^{n-1}u(n-1) = \mathscr{Z}^{-1}[(zI - A)^{-1}] \tag{12-94}$$

注意式(12-94)虽与前面式(12-53)类似,但形式上稍有不同。

与连续时间系统分析的情况相仿,取 z 变换输出方程的零状态分量可求得

系统函数$H(z)$。由式(12－91)的 $Y(z)$中后两项可以得出系统的转移函数为

$$H(z)=\boldsymbol{C}(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D} \tag{12-95}$$

如果对于多输入、多输出的情况,类似于式(12－61)有

$$\boldsymbol{H}_{r\times m}(z)=\boldsymbol{C}_{r\times k}(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})_{k\times k}^{-1}\boldsymbol{B}_{k\times m}+\boldsymbol{D}_{r\times m} \tag{12-96}$$

转移函数阵中每一元素的物理意义与式(12－62)中每一元素的物理意义相同。

例 12－11 已知描述系统的矩阵参数 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$,求 $\boldsymbol{A}^n$。

解 按式(12－93)有

$$\boldsymbol{A}^n=\mathscr{Z}^{-1}[\boldsymbol{I}-z^{-1}\boldsymbol{A}]^{-1}=\mathscr{Z}^{-1}\begin{bmatrix}1-\frac{1}{2}z^{-1} & 0\\ -\frac{1}{4}z^{-1} & 1-\frac{1}{4}z^{-1}\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\mathscr{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}\begin{bmatrix}1-\frac{1}{4}z^{-1} & 0\\ \frac{1}{4}z^{-1} & 1-\frac{1}{2}z^{-1}\end{bmatrix}\right\}$$

$$=\mathscr{Z}^{-1}\begin{bmatrix}\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} & 0\\ \dfrac{\frac{1}{4}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)} & \dfrac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\left(\frac{1}{2}\right)^n & 0\\ \left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{4}\right)^n & \left(\frac{1}{4}\right)^n\end{bmatrix}=\left(\frac{1}{4}\right)^n\begin{bmatrix}2^n & 0\\ 2^n-1 & 1\end{bmatrix}\quad n\geqslant 0$$

在得到 $\boldsymbol{A}^n$之后,即可根据需要按式(12－87)和式(12－88)从时域解出状态方程和输出方程。

下面介绍用 z 变换方法分析离散系统的实例。

例 12－12 图 12－18 所示离散系统具有两个输入和一个输出,求系统对 $x_1(n)=\delta(n)$,$x_2(n)=u(n)$的响应,设该系统起始是静止的。

解 (1) 列写系统的状态方程和输出方程

取延时单元输出为状态变量,如图 12－18 中所标的 $\lambda_1(n)$和 $\lambda_2(n)$,则

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1(n+1)&=-\lambda_1(n)+3\lambda_2(n)+11x_1(n)\\ \lambda_2(n+1)&=-2\lambda_1(n)+4\lambda_2(n)+6x_2(n)\\ y(n)&=\lambda_1(n)-\lambda_2(n)+x_2(n)\end{aligned}\right\} \tag{12-97}$$

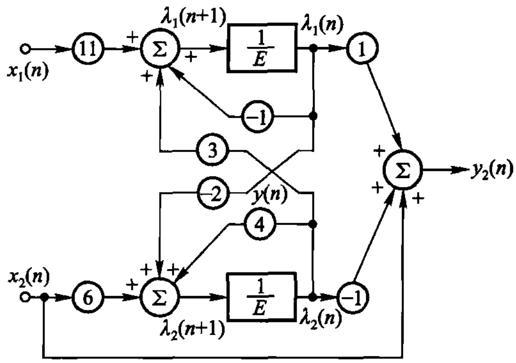


图 12-18 例 12-12 的系统

由此得

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ -2 & 4\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}11 & 0\\ 0 & 6\end{bmatrix}$$

$$C=[1,-1]\quad D=[0,1]$$

(2) 下面用 z 变换法求 $\boldsymbol{\Lambda}(z)$，由式(12-91)

$$\boldsymbol{\Lambda}(z)=(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}(z)$$

$$=\frac{1}{(z+1)(z-4)+6}\begin{bmatrix}z-4 & 3\\ -2 & z+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}11 & 0\\ 0 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ \frac{z}{z-1}\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{(z-1)(z-2)}\begin{bmatrix}11(z-4)+\frac{18z}{z-1}\\ -22+\frac{6z(z+1)}{z-1}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{33}{z-1}-\frac{22}{z-2}+\frac{36}{z-2}-\frac{18}{(z-1)^2}-\frac{36}{z-1}\\ \frac{22}{z-1}-\frac{22}{z-2}+\frac{36}{z-2}-\frac{12}{(z-1)^2}-\frac{30}{z-1}\end{bmatrix}$$

取逆变换后得到

$$\boldsymbol{\lambda}(n)=\begin{bmatrix}15u(n-1)+7\cdot 2^n u(n-1)-18nu(n-1)\\ 4u(n-1)+7\cdot 2^n u(n-1)-12nu(n-1)\end{bmatrix}\qquad(12-98)$$

再用 z 变换法求 $Y(z)$，由式(12-91)

$$Y(z)=\boldsymbol{C}(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}(z)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{X}(z)$$

$$=[1,-1]\frac{1}{(z-1)(z-2)}\begin{bmatrix}z-4 & 3\\ -2 & z+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}11 & 0\\ 0 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ \frac{z}{z-1}\end{bmatrix}+$$

$$[0,1]\begin{bmatrix}1\\ \dfrac{z}{z-1}\end{bmatrix} \tag{12-99}$$

取逆变换后得到

$$\begin{aligned} y(n) &= [15u(n-1)+7\cdot 2^n u(n-1)-18nu(n-1)]- \\ &\quad [4u(n-1)+7\cdot 2^n u(n-1)-12nu(n-1)]+u(n) \\ &= \delta(n)+(12-6n)u(n-1) \end{aligned} \tag{12-100}$$

注意到 $Y(z)$表达式(12-99)中的$(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}(z)$部分就是刚刚导出的$\boldsymbol{\Lambda}(z)$,因而在求解过程中直接抄录了式(12-98)已经得到的结果。经整理后最终求出 $y(n)$。

12.6 状态矢量的线性变换

从状态变量的选择看出,同一系统可以选择不同的状态变量,但所选每种状态变量相互之间存在着变换关系。它可以看作同一系统在状态空间中取了不同的基底,而状态矢量用不同基底表示时具有不同的形式,因此,对同一系统而言,以各种形式表示的状态矢量之间存在着线性变换关系。这种线性变换,对于简化系统分析是很有用的。

(一) 在线性变换下状态方程的特性

按线性空间不同基底的变换关系,设一组状态变量 $\boldsymbol{\lambda}$ 与另一组状态变量 $\boldsymbol{\gamma}$ 之间有

$$\begin{cases} \gamma_1 = p_{11}\lambda_1 + p_{12}\lambda_2 + \cdots + p_{1k}\lambda_k \\ \gamma_2 = p_{21}\lambda_1 + p_{22}\lambda_2 + \cdots + p_{2k}\lambda_k \\ \quad\vdots \\ \gamma_k = p_{k1}\lambda_1 + p_{k2}\lambda_2 + \cdots + p_{kk}\lambda_k \end{cases} \tag{12-101}$$

表示成矢量形式即为

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\lambda} \tag{12-102}$$

其中 $\boldsymbol{\gamma}$ 和 $\boldsymbol{\lambda}$ 为列矢量

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \vdots\\ \gamma_k\end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_k\end{bmatrix}$$

$$P=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{k1} & p_{k2} & \cdots & p_{kk} \end{bmatrix}$$

式(12－101)说明状态矢量 $\boldsymbol{\lambda}$ 经过线性变换成为新的矢量 $\boldsymbol{\gamma}$。如果 $\boldsymbol{P}$ 的逆 $\boldsymbol{P}^{-1}$ 存在，则有

$$\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\gamma} \tag{12-103}$$

$\boldsymbol{\lambda}$ 经线性变换变成 $\boldsymbol{\gamma}$，则原状态方程也进行相应的改变。设原基底下状态方程表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\lambda}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\lambda}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{e}(t)$$

经式(12－102)变换后

$$\boldsymbol{P}^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\gamma}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\gamma}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{e}(t)$$

或

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\gamma}(t)=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\gamma}(t)+\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{e}(t)\\ \qquad\qquad =\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{\gamma}(t)+\hat{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{e}(t)\\ \boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{\lambda}(t)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{e}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\gamma}(t)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{e}(t)\end{cases}$$
$$\qquad =\hat{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{\gamma}(t)+\hat{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{e}(t) \tag{12-104}$$

因而在新的状态变量下，状态方程与输出方程中的系数矩阵 $\hat{\boldsymbol{A}},\hat{\boldsymbol{B}},\hat{\boldsymbol{C}},\hat{\boldsymbol{D}}$ 与原方程的 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 之间满足如下关系

$$\begin{cases}\hat{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1}\\ \hat{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\\ \hat{\boldsymbol{C}}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}^{-1}\\ \hat{\boldsymbol{D}}=\boldsymbol{D}\end{cases} \tag{12-105}$$

例 12－13　给定系统的状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\boldsymbol{\lambda}(t)+\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}e(t) \tag{12-106}$$

求在式(12－107)线性变换下的新的状态方程

$$\begin{cases}\gamma_1=\lambda_1+\lambda_2\\ \gamma_2=\lambda_1-\lambda_2\end{cases} \tag{12-107}$$

解　给定的变换矩阵为

$$\begin{cases} \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{P}^{-1} = \begin{bmatrix} +\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} \\ +\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{cases}$$

由式(12－105)求出

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{PAP}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \\ \hat{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{PB} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

这样在给定变换下新的状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{\gamma}(t) + \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} e(t) \qquad (12-108)$$

由式(12－105)的 $\hat{\boldsymbol{A}}$ 可以看出，实际上 $\hat{\boldsymbol{A}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的相似变换，由于相似变换不改变 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，因而作为表征系统特性的特征值不因状态变量的不同选择而改变。

（二）系统转移函数阵在线性变换下是不变的

从本质上讲状态方程是描述系统的一种方法，而系统转移函数是描述系统的另一种方法。当状态矢量用不同基底表示时，并不影响系统的物理本质，因此对同一系统不同状态变量的选择，系统转移函数应是不变的，现证明如下：

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{H}}(s) &= \hat{\boldsymbol{C}}(s\boldsymbol{I} - \hat{\boldsymbol{A}})^{-1}\hat{\boldsymbol{B}} + \hat{\boldsymbol{D}} = \boldsymbol{CP}^{-1}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{PAP}^{-1})^{-1}\boldsymbol{PB} + \boldsymbol{D} \\ &= \boldsymbol{C}[(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{PAP}^{-1})\boldsymbol{P}]^{-1}\boldsymbol{PB} + \boldsymbol{D} \\ &= \boldsymbol{C}[\boldsymbol{P}^{-1}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{PAP}^{-1})\boldsymbol{P}]^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D} \\ &= \boldsymbol{C}[s\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{IP} - \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{PAP}^{-1}\boldsymbol{P}]^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D} \\ &= \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D} = \boldsymbol{H}(s) \end{aligned} \qquad (12-109)$$

上面以连续系统为例说明状态矢量线性变换的特性，结论同样适用于离散系统。

（三）A 矩阵的对角化

在线性变换中，使 $\boldsymbol{A}$ 矩阵对角化是很有用的变换。由图 12－11 和式(12－30)知，$\boldsymbol{A}$ 矩阵的对角化，说明系统变换成并联结构形式。这种结构形式使得每一状态变量之间互不影响，因而可以独立研究系统参数对状态变量的影响。

在线性代数中已经分析了 $\boldsymbol{A}$ 矩阵的对角化，实际上就是以 $\boldsymbol{A}$ 矩阵的特征

矢量作为基底的变换。因而把 $\boldsymbol{A}$ 矩阵对角化所需要的线性变换就是寻求 $\boldsymbol{A}$ 矩阵的特征矢量，以此构作变换阵 $\boldsymbol{P}$，即可把状态变量相互之间分离开。

例 12－14　把图 12－19 所示系统的 $\boldsymbol{A}$ 矩阵对角化。

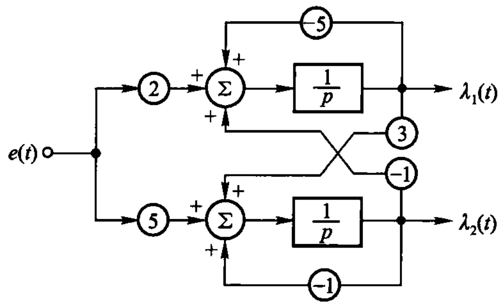


图 12－19　例 12－14 的系统

解　这个系统状态变量相互之间是有约束关系的，列出系统的状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t)=\begin{bmatrix}-5 & -1\\ 3 & -1\end{bmatrix}\boldsymbol{\lambda}(t)+\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}e(t) \qquad (12-110)$$

把 $\boldsymbol{A}$ 矩阵对角化，即寻求 $\boldsymbol{A}$ 的特征矢量，为此先求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值

$$|\alpha\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\alpha+5 & 1\\ -3 & \alpha+1\end{vmatrix}$$

$$=(\alpha+5)(\alpha+1)+3=(\alpha+2)(\alpha+4)=0$$

求得特征值为

$$\begin{cases}\alpha_1=-2\\ \alpha_2=-4\end{cases}$$

按特征矢量 $\boldsymbol{\xi}$ 的定义 $\boldsymbol{A\xi}=\alpha\boldsymbol{\xi}$，即可由此求特征矢量 $\boldsymbol{\xi}$。

令属于 $\alpha_1=-2$ 的特征矢量为

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix}c_{11}\\ c_{21}\end{bmatrix}$$

则有

$$\begin{bmatrix}-5+2 & -1\\ 3 & -1+2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_{11}\\ c_{21}\end{bmatrix}=0$$

或

$$\begin{cases}-3c_{11}-c_{21}=0\\ 3c_{11}+c_{21}=0\end{cases}$$

得

$$c_{21}=-3c_{11}$$

这里,属于 $\alpha=-2$ 的特征矢量是多解的,其中之一可表示为

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix}$$

同样,令属于 $\alpha_2=-4$ 的特征矢量为

$$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{bmatrix}c_{12}\\c_{22}\end{bmatrix}$$

则有

$$\begin{bmatrix}-5+4 & -1\\3 & -1+4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_{12}\\c_{22}\end{bmatrix}=0$$

或

$$\begin{cases}-c_{12}-c_{22}=0\\3c_{12}+3c_{22}=0\end{cases}$$

得 $$c_{22}=-c_{12}$$

属于 $\alpha=-4$ 的一个特征矢量为

$$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

由此构成的变换阵①

$$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12}\\c_{21} & c_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\-3 & -1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12}\\c_{21} & c_{22}\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1 & -1\\3 & 1\end{bmatrix}$$

所以有

$$\hat{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{PAP}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1 & -1\\3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-5 & -1\\3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\-3 & -1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-2 & 0\\0 & -4\end{bmatrix}$$

$$\hat{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{PB}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1 & -1\\3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7/2\\11/2\end{bmatrix}$$

因此变换后的状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)=\begin{bmatrix}-2 & 0\\0 & -4\end{bmatrix}\boldsymbol{\gamma}(t)+\begin{bmatrix}-7/2\\11/2\end{bmatrix}e(t) \qquad (12-111)$$

---

① 在线性代数中相似变换形如 $\hat{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{AC}$,$\hat{\boldsymbol{A}}$ 为对角阵,则 $\boldsymbol{C}$ 是由特征矢量构成的变换阵,而这里 $\hat{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{PAP}^{-1}$,因而 $\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{C}$。

式(12－111)对应的结构图如图 12－20 所示,可见 $\gamma_1(t)$和 $\gamma_2(t)$互不影响。如果表示成联立方程的形式即为两个独立方程

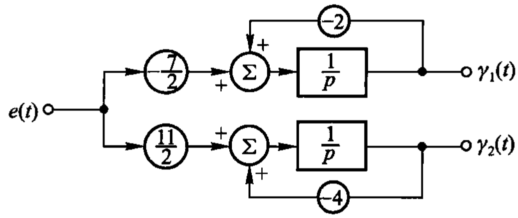


图 12－20　式(12－111)结构图

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\gamma_1(t)=-2\gamma_1(t)-\dfrac{7}{2}e(t)\\[2ex]\dfrac{d}{dt}\gamma_2(t)=-4\gamma_2(t)+\dfrac{11}{2}e(t)\end{cases}\tag{12-112}$$

显然方程(12－112)的解为

$$\begin{cases}\gamma_1(t)=\gamma_1(0_-)e^{-2t}-\dfrac{7}{2}e^{-2t}*e(t)\\[2ex]\gamma_2(t)=\gamma_2(0_-)e^{-4t}+\dfrac{11}{2}e^{-4t}*e(t)\end{cases}\tag{12-113}$$

其中初始条件 $\gamma_1(0_-)$和 $\gamma_2(0_-)$由下式求出

$$\begin{bmatrix}\gamma_1(0_-)\\\gamma_2(0_-)\end{bmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\lambda_1(0_-)\\\lambda_2(0_-)\end{bmatrix}$$

12.7　系统的可控制性与可观测性

系统的可控制性(controllability)也称为能控制性,简称可控性或能控性。

系统的可观测性(observability)也称为能观测性,简称可观性或能观性。

用状态变量描述系统时,我们将着眼于系统内部各状态变量之变化。外部控制作用期望使系统的状态达到预期目标;通过对系统观测获取的信息可以知道系统的状态,此作用示意见图 12－21。为研究外部对系统控制与观测作用的性能,可从以下两方面来考虑:

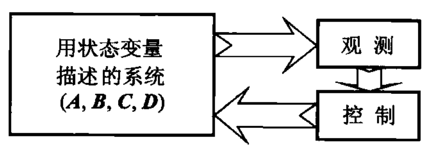


图 12－21　对系统的控制与观测

(1) 控制作用是否必然可使系统在有限时间内,从起始状态指引到所要求

状态，这就是可控制性问题。

(2) 是否可以做到，通过观测有限时间内的输出量，而识别出系统的起始状态。因为一旦能够根据输出量识别出起始状态，则任一状态也就惟一确定。这就是可观测性问题。

下面先讨论典型实例的可控性与可观性，然后再给出严格的定义和性能判据方法。

(一) 从典型实例直观认识可控性与可观性

例 12-15 如果已知系统的状态方程和输出方程如下

$$\begin{cases}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\lambda(t)\right]=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}[\lambda(t)]+\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}e(t)\\ r(t)=[1,1,0][\lambda(t)]\end{cases}\tag{12-114}$$

试讨论激励信号 $e(t)$ 对各状态变量的控制情况，以及从输出信号 $r(t)$ 能够了解系统内部状态的情况。

解

可以画出系统的流图如图 12-22 所示。同时写出状态方程与输出方程的各参数矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}=[1,1,0]\qquad \boldsymbol{D}=0$$

由图 12-22 和 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 参数可以看出，在本例中，由于 $\boldsymbol{A}$ 矩阵为对角阵形式，各状态变量的作用相互独立，因而可以逐个分析各 $\boldsymbol{\lambda}(t)$ 的可控性与可观性。容易看出，$\lambda_2(t)$ 直接受 $e(t)$ 控制，而且可从 $r(t)$ 观测到它的变化情况；而 $\lambda_1(t)$ 不受 $e(t)$ 作用影响，可从 $r(t)$ 了解到它的输出变化；$\lambda_3(t)$ 的情况则与此相反，它受 $e(t)$ 的控制，但不能从 $r(t)$ 观测到其输出。于是可以认为在此系统中 $\lambda_1(t)$ 是可观的，但不可控；而 $\lambda_3(t)$ 是可控的，但不可观；只有 $\lambda_2(t)$ 是既可控又可观的。

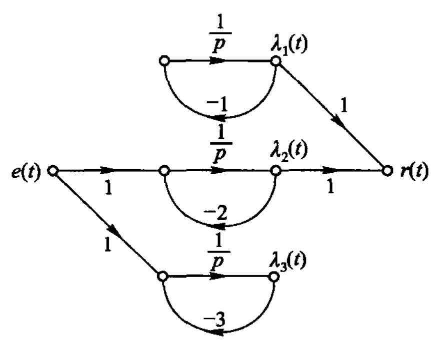


图 12-22 例 12-15 的流图

上述结论不仅可从图 12-22 看出，也可借助 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 矩阵参数识别，即当 $\boldsymbol{A}$ 为对角阵形式时，$\boldsymbol{B}$ 中的 0 元素对应不可控因素，而 $\boldsymbol{C}$ 中的 0 元素对应不

可观现象。这一重要规律将在稍后的第(四)部分进一步说明。

例 12-16　在图 12-23 的桥式电路中，$R_1=R_2=R_3=R_4=1\ \Omega$，$L=2\ \text{H}$，$C=2\ \text{F}$，激励信号为电压源$e(t)$，输出信号$r(t)$取自$1-1'$端。试建立此电路的状态方程，并讨论它的可控性与可观性。

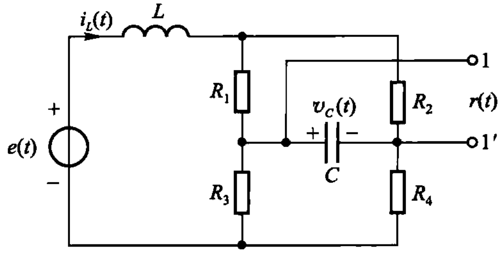


图 12-23　桥式电路

解

选定状态变量为流过电感 L 的电流 $i_L(t)$和电容 C 两端电压 $v_C(t)$。根据 KCL 和 KVL 可建立如下方程

$$
\begin{cases}
\begin{bmatrix}\dfrac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}\\ \dfrac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{2} & 0\\ 0 & -\dfrac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_L(t)\\ v_C(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{1}{2}\\ 0\end{bmatrix}e(t)\\
[r(t)]=[0,1]\begin{bmatrix}i_L(t)\\ v_C(t)\end{bmatrix}
\end{cases}
\tag{12-115}
$$

对图 12-23 的电桥直观分析容易看出，在给定参数条件下($R_1=R_2=R_3=R_4$)电桥平衡，因此无论 $e(t)$如何改变都不能影响 $v_C(t)$的数值，也即 $v_C(t)$不可控。此外，无论电流 $i_L(t)$如何变化都无法从输出 $r(t)$观测有关它的任何信息，因此 $i_L(t)$是不可观的。这一结果也可从状态方程与输出方程表达式的参数中看出，因为 $\boldsymbol{A}$ 为对角阵，而相应的 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 中各有一个零值，刚好对应上述不可控与不可观现象的产生。

(二) 系统可控性定义、可控阵满秩判别法

所谓可控性被定义为：当系统用状态方程描述时，给定系统的任意初始状态，可以找到容许的输入量(即控制矢量)，在有限时间之内把系统的所有状态引向状态空间的原点(即零状态)，如果可以做到这一点，则称系统是完全可控制的。如果只有对部分状态变量可以做到这一点，则称系统不完全可控制的。

在上述定义中，如果改成存在容许的输入量，能在有限时间之内把系统从状

态空间的原点引向任意的预先指定的状态,这样的问题称为系统的可达性问题。对线性时不变系统可控性与可达性是等同的。

在前面两个实例的讨论中,实际上我们已经看到了可控性的一种判据方法,这就是检查与 $\boldsymbol{A}$ 对角阵对应的 $\boldsymbol{B}$ 矢量中是否含有零元素,稍后还要对此进行研究。下面介绍可控性的另一种判据方法,称为"可控阵满秩判别法"。受本书篇幅所限,我们只给出结论,它的推证过程可查阅参考书目[2]的 12.7 节。

这种方法首先要定义系统的"可控性判别矩阵",简称"可控阵",以 $\boldsymbol{M}$ 表示,即

$$\boldsymbol{M}=[\boldsymbol{B} \mid \boldsymbol{AB} \mid \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B} \mid \cdots \mid \boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{B}] \tag{12-116}$$

在给定系统状态方程时,只要 $\boldsymbol{M}$ 阵满秩,系统即为完全可控系统。这是完全可控的充要条件。

例 12-17 给定下列两系统

$$(1)\ \begin{bmatrix}\dot{\lambda}_1(t)\\ \dot{\lambda}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1(t)\\ \lambda_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}e(t) \tag{12-117}$$

$$(2)\ \begin{bmatrix}\dot{\lambda}_1(t)\\ \dot{\lambda}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1(t)\\ \lambda_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}e(t) \tag{12-118}$$

问这两系统是否都可控?

解 验证系统是否可控只要观察式(12-116)是否满秩即可。

对系统(1)有

$$\boldsymbol{M}=[\boldsymbol{B} \mid \boldsymbol{AB}]=\left[\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\right]=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

所以 $\text{rank}[\boldsymbol{B} \mid \boldsymbol{AB}]=1$,因而系统(1)是不完全可控的。

对系统(2)有

$$\boldsymbol{M}=[\boldsymbol{B} \mid \boldsymbol{AB}]=\left[\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\right]=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

所以 $\text{rank}[\boldsymbol{B} \mid \boldsymbol{AB}]=2$,因而系统(2)是完全可控的。

对于离散时间系统,可控性的判别方法与连续时间系统完全相同,也即只要式(12-116)$\boldsymbol{M}$ 矩阵满秩,系统即为完全可控系统。此处略去证明,给出计算例子。

例 12-18 给定离散系统用式(12-119)描述

$$\boldsymbol{\lambda}(n+1)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{\lambda}(n)+\begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix}x(n) \tag{12-119}$$

该系统能否通过 $x(n)$ 的控制作用在有限时间之内使系统由给定的起始状态引向零状态?

解

将给定 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 参数写入式(12-116)得到

$$\boldsymbol{M}=[\boldsymbol{B} \mid \boldsymbol{AB}]=\left[\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}\right]=\begin{bmatrix}1 & 3\\3 & -1\end{bmatrix} \qquad (12-120)$$

显然,此方阵是满秩的,因而,系统完全可控。可在有限时间之内将系统引向零状态。

(三)系统可观性定义、可观阵满秩判别法

系统的可观性就是根据系统的输出量来确定系统的所有起始状态。系统的可观性被定义为:如果系统用状态方程来描述,在给定控制后,能在有限时间间隔内($0<t<t_1$)根据系统输出惟一地确定系统的所有起始状态,则称系统完全可观;若只能确定部分起始状态,则称系统不完全可观。

在前文的实例讨论中,我们已看到可观性判据的一种方法,这就是检查与 $\boldsymbol{A}$ 对角阵对应的 $\boldsymbol{C}$ 矢量中是否含有零元素,稍后还要讨论这种方法的应用。现在介绍可观性的另一种判据方法,称为“可观阵满秩判别法”。受本书篇幅所限,我们只给出结论,它的推证过程可查阅参考书目[2]的 12.7 节。

与可控阵满秩判别法类似,这里也要定义一个矩阵,即“可观性判别矩阵”,简称“可观阵”,以 $\boldsymbol{N}$ 表示,即

$$\boldsymbol{N}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}\\ \hdashline \boldsymbol{CA}\\ \hdashline \vdots\\ \hdashline \boldsymbol{CA}^{k-1}\end{bmatrix} \qquad (12-121)$$

在给定系统的状态方程时,只要 $\boldsymbol{N}$ 满秩,系统即为完全可观系统。这是完全可观的充要条件。

例 12-19 讨论给定系统

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{\lambda}_1(t)\\ \dot{\lambda}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\-2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1(t)\\ \lambda_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}e(t)\\ r(t)=[1,0]\begin{bmatrix}\lambda_1(t)\\ \lambda_2(t)\end{bmatrix}\end{cases} \qquad (12-122)$$

的可观性。

解

将给定的 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}$ 参数代入式(12-121)得到

$$\boldsymbol{N}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}\\ \hdashline \boldsymbol{CA}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}[1,0]\\ [1,0]\begin{bmatrix}1 & 1\\-2 & -1\end{bmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}$$

所以 rank $N=2$ 满秩,因而,给定系统是完全可观的。

对于离散时间系统,可观性的判别方法与连续时间系统完全相同,也即只要式(12-121)N 矩阵满秩,系统即为完全可观系统。此处略去证明,给出计算例子。

例 12-20 给定离散系统

$$\begin{cases} \boldsymbol{\lambda}(n+1)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{\lambda}(n)+\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}x(n) \\ y(n)=[1,0]\boldsymbol{\lambda}(n) \end{cases} \tag{12-123}$$

系统是否完全可观?

解

在本例中

$$\boldsymbol{N}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \\ \cdots\cdots \\ \boldsymbol{CA} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} [1,0] \\ [1,0]\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

所以

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \\ \cdots\cdots \\ \boldsymbol{CA} \end{bmatrix}=2$$

$\boldsymbol{N}$ 满秩,因而给定的系统完全可观。

(四)单输入、单输出系统可控与可观性的 $\boldsymbol{A}$ 矩阵约当规范型判据

利用 $\boldsymbol{M}$ 矩阵和 $\boldsymbol{N}$ 矩阵满秩的方法判别系统的可控与可观性并不直观,它只说明系统是否可控或可观,而哪些状态可控或可观,哪些状态不能,并未给出回答。实际上,可控性说明状态变量与输入量之间的联系,可观性说明状态变量与输出量之间的联系。因而,如果对状态矢量进行相似变换,把 $\boldsymbol{A}$ 矩阵对角化,则各状态变量之间相互分离,这样就很容易看出状态变量与输入量或输出量之间有无关联,这就是构成可控性或可观性判据另一形式的依据。

在前面例 12-15 与例 12-16 分析中已经看到,当 $\boldsymbol{A}$ 为对角阵时,$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 中的零元素即对应系统的不可控与不可观部分。下面只给出单输入-单输出系统这种判据的结论,不作证明。这些规律对连续与离散时间系统同样有效。

线性时不变系统可控性另一判据形式是:设给定系统具有两两相异的特征值,则其状态完全可控的充分必要条件是系统经非奇异变换后成为 $\boldsymbol{A}$ 对角化的形式,在此形式中 $\boldsymbol{B}$ 不包含零元素。

而可观性的另一判据形式是:设系统具有两两相异的特征值,则其状态完全可观的充分必要条件是系统经非奇异变换后,其状态方程的 $\boldsymbol{A}$ 对角化形式中,$\boldsymbol{C}$ 不包含零元素。

对于特征值具有重根的情况,$\boldsymbol{A}$ 矩阵将呈现约当规范型,实际上在线性代

数理论中已经知道,对角阵只是约当阵的一种特例。在有重根情况下,系统可控性与可观性利用 $\boldsymbol{A}$ 约当规范型的判据方法陈述如下:若在 $\boldsymbol{A}$ 为约当规范型时,$\boldsymbol{B}$ 与每个约当块最后一行相应的那些行不含零元素,则系统完全可控。若在 $\boldsymbol{A}$ 为约当规范型时,$\boldsymbol{C}$ 与每个约当块第一行相应的那些列不含零元素,则系统完全可观。

下面通过一个实例来说明这种判别方法的应用。在 12.2 节例 12-5 中,$\boldsymbol{A}$ 矩阵具有约当规范形式,见式(12-36)。首先考虑特征值 -2 和 -3 的情况,它们是两个单根,与其对应的 $\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{C}$ 元素都未出现零值$\left(\text{分别为 }1,1\text{ 和 }-2,\frac{1}{8}\right)$,因而都是可控与可观的。而对于特征值 -1 为三重根,与约当块最后一行(也即 $\boldsymbol{A}$ 的第 3 行)相应的 $\boldsymbol{B}$ 元素是 1,因而可控;与约当块第一行(也即 $\boldsymbol{A}$ 的第一行,对应变量 λ_1)相应的 $\boldsymbol{C}$ 元素为 $\frac{3}{2}$,因而可观。综上,系统是完全可控和完全可观的。

然而,如果把此例中 $\boldsymbol{B}$ 元素第 3 行的"1"更换为"0"或将 $\boldsymbol{C}$ 元素第一列的"$\frac{3}{2}$"更换为"0",系统将出现不可控或不可观现象。对照图 12-13 可以清楚地看到,在上述不同假设的 $\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{C}$ 情况下,系统的 $e(t)$ 与 $r(t)$ 和各变量 λ 的联系。例如当 $\boldsymbol{C}$ 的第一列为 $\frac{3}{2}$ 时,从 $r(t)$ 可观测到 λ_3 输出的变化,系统完全可观,若将此 $\frac{3}{2}$ 改为 0,则 $r(t)$ 与 λ_3 无关,变量 λ_3 不可观测。

通过以上讨论可以看出,若给定系统的状态方程并非 $\boldsymbol{A}$ 约当规范型(或 $\boldsymbol{A}$ 对角阵),可以借助 $\boldsymbol{M}$ 矩阵与 $\boldsymbol{N}$ 矩阵是否满秩的方法判别其可控性与可观性;也可将矩阵经相似变换转化为 $\hat{\boldsymbol{A}}$ 约当规范型(或 $\hat{\boldsymbol{A}}$ 对角阵),然后利用上述方法检验 $\hat{\boldsymbol{B}}$,$\hat{\boldsymbol{C}}$ 是否出现对应的零元素,从而判别其可控性与可观性。后一种方法具有更为直观的优点。

(五) 可控和可观性与系统转移函数之间的关系

上面分析了单输入-单输出系统的可控性与可观性概念,而系统转移函数的描述方法在系统分析中也应用很广,那么,这两者之间有什么关系呢?下面以连续时间系统的 $H(s)$ 为例进行分析,所得结论同样适用于离散时间系统的 $H(z)$。

在式(12-56)已经得出转移函数可以表示为

$$H(s)=\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}$$

而且证明了转移函数 $H(s)$ 在线性变换下保持不变,即

$$H(s)=\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}=\hat{\boldsymbol{C}}(s\boldsymbol{I}-\hat{\boldsymbol{A}})^{-1}\hat{\boldsymbol{B}}+\hat{\boldsymbol{D}} \qquad (12-124)$$

现设系统经非奇异变换而对角化,则转移函数可以写成

$$H(s)=\hat{\boldsymbol{C}}(s\boldsymbol{I}-\hat{\boldsymbol{A}})^{-1}\hat{\boldsymbol{B}}$$

$$=[\hat{c}_1,\hat{c}_2,\cdots,\hat{c}_k]\begin{bmatrix}s-\alpha_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & s-\alpha_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & s-\alpha_k\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\hat{b}_1\\ \hat{b}_2\\ \vdots\\ \hat{b}_k\end{bmatrix} \tag{12-125}$$

这里暂且不考虑与输入信号直接相联系的 $\boldsymbol{D}$,因为它不影响问题的性质。

把式(12－125)展开,即得

$$H(s)=\frac{\hat{c}_1\hat{b}_1}{s-\alpha_1}+\frac{\hat{c}_2\hat{b}_2}{s-\alpha_2}+\cdots+\frac{\hat{c}_k\hat{b}_k}{s-\alpha_k}$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\frac{\hat{c}_i\hat{b}_i}{s-\alpha_i} \tag{12-126}$$

上面已经分析了若系统不完全可控或不完全可观,则 $\hat{\boldsymbol{B}}$ 或 $\hat{\boldsymbol{C}}$ 中包含有零元素。只要 $\hat{b}_i$ 或 $\hat{c}_i$ 两者之一为零,就使式(12－126)中对应项消失,也就是 $H(s)$ 原来有 k 个极点(即 $s=\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$),而现在 $H(s)$ 的极点减少了,这就是说,$H(s)$ 的特征多项式 $|s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|$ 有降阶现象。就 $H(s)$ 本身来说,降阶是由于分母中的极点与分子的零点相对消引起的,由此得出一条重要特性:若系统不完全可控或不完全可观,则在 s 域上表现为 $H(s)$ 必有零极点相消现象。这是系统转移函数的一条重要特性。

另外,由式(12－126)可知,零极点相消部分必定是不可控或不可观部分,而留下的是可控或可观部分。因而用转移函数描述的系统只是反映了系统中可控和可观那部分运动规律,而不能反映不可控和不可观那部分的运动规律,这是系统转移函数的第二条重要特性。由此也可以得出这样的结论:用转移函数描述系统是不全面的,而用状态方程和输出方程来描述一个系统的运动更全面、更详尽。

例 12－21 给定线性时不变系统的状态方程和输出方程为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t)=\begin{bmatrix}-1 & -2 & -1\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}\boldsymbol{\lambda}(t)+\begin{bmatrix}2\\ 1\\ 1\end{bmatrix}e(t)\\ r(t)=[1,-1,0]\boldsymbol{\lambda}(t)\end{cases} \tag{12-127}$$

(1) 检查系统的可控性和可观性;

(2) 求可控与可观的状态变量个数;

(3) 求系统的输入－输出转移函数。

解 (1) 按系统可控性判据,即式(12－116)的 $\boldsymbol{M}$ 是否满秩。为此求

$$\boldsymbol{M}=[\boldsymbol{B} \;\vdots\; \boldsymbol{AB} \;\vdots\; \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}]$$

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}-1 & -2 & -1\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5\\-3\\-2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-1 & -2 & -1\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -2 & -1\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13\\9\\4\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}2 & -5 & 13\\ 1 & -3 & 9\\ 1 & -2 & 4\end{bmatrix}$$

由于 $\boldsymbol{M}$ 中的第 2 行与第 3 行相加等于第一行，因而

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{M}=2\neq 3$$

即 $\boldsymbol{M}$ 不是满秩的，故系统不完全可控。

检查可观性，只要检验式(12－121)判据，此时

$$\boldsymbol{N}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}\\ \cdots\cdots\\ \boldsymbol{CA}\\ \cdots\cdots\\ \boldsymbol{CA}^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 3\end{bmatrix}$$

此式的第 1 列乘以(－1)等于第 2 列，因而

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{N}=2\neq 3$$

即 $\boldsymbol{N}$ 也不是满秩的，故系统不完全可观。

(2) 为求可控和可观状态变量个数可以对状态方程变换为对角化的规范形式。经求特征矢量得到对角化所需的变换矩阵为

$$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

系统对角化的方程表示为

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)&=\boldsymbol{PAP}^{-1}\boldsymbol{\gamma}(t)+\boldsymbol{PB}e(t)\\ &=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}\boldsymbol{\gamma}(t)+\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}e(t)\\ r(t)&=\boldsymbol{CP}^{-1}\boldsymbol{\gamma}(t)=[1,1,0]\boldsymbol{\gamma}(t)\end{aligned}\qquad(12-128)$$

由式(12－128)可见,对角化以后

$$\hat{\boldsymbol{B}}=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\qquad \hat{\boldsymbol{C}}=[1,1,0]$$

$\hat{\boldsymbol{B}}$,$\hat{\boldsymbol{C}}$ 各包含一个零元素,因而其中 $\gamma_2(t)$ 和 $\gamma_3(t)$ 两个状态变量可控;$\gamma_1(t)$ 和 $\gamma_2(t)$ 两个状态变量可观,画成结构图如图 12－24 所示。不难发现,此图与图 12－22 结构完全相同。

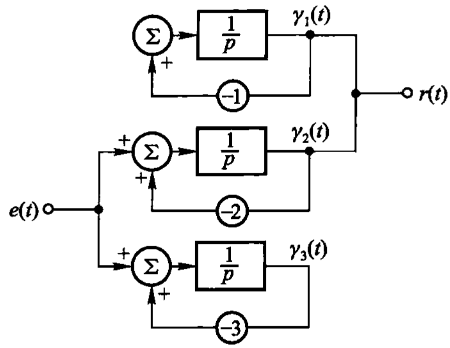


图 12－24　例 12－21 系统经对角化变换后结构图

(3) 求系统的转移函数 $H(s)$

$$H(s)=\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}=\hat{\boldsymbol{C}}(s\boldsymbol{I}-\hat{\boldsymbol{A}})^{-1}\hat{\boldsymbol{B}}$$

$$=[1,1,0]\begin{bmatrix}s+1&0&0\\0&s+2&0\\0&0&s+3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$=[1,1,0]\frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}\cdot$$

$$\begin{bmatrix}(s+2)(s+3)&0&0\\0&(s+1)(s+3)&0\\0&0&(s+1)(s+2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{(s+1)(s+3)}{(s+1)(s+2)(s+3)}=\frac{1}{s+2}\qquad(12-129)$$

可见系统具有零极点相消现象,相消结果保留(－2)特征根。从图 12－24 明显地看出,输入量只有通过 $\gamma_2(t)$ 影响到输出量 $r(t)$,这说明用系统转移函数来描述一系统是不全面的。

习　　题

12－1　如题图 12－1 所示电路,输出量取 $r(t)=v_{C2}(t)$,状态变量取 C_1 和 C_2 上的电压 $\lambda_1(t)=v_{C1}(t)$ 和 $\lambda_2(t)=v_{C2}(t)$,且有 $C_1=C_2=1\ \text{F}$,$R_0=R_1=R_2=1\ \Omega$。列写系统的状态方程和输出方程。

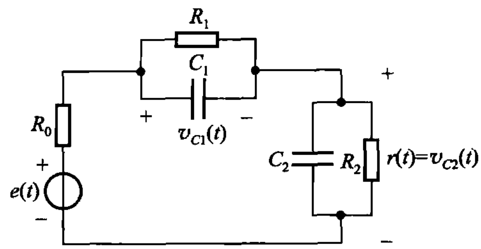
12－2　已知系统的传输算子表达式为

$$H(p)=\frac{1}{(p+1)(p+2)}$$

试建立一个二阶状态方程,使其 $\boldsymbol{A}$ 矩阵具有对角阵形式并画出系统的流图。

12－3　给定系统微分方程表达式如下:

$$a\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3}y(t)+b\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t)+c\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+\mathrm{d}y(t)=0$$



题图 12-1

选状态变量为$\lambda_1(t)=ay(t)$

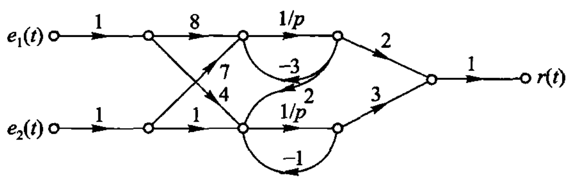
$$\lambda_2(t)=a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+by(t)$$

$$\lambda_3(t)=a\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t)+b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+cy(t)$$

输出量取 $$r(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)$$

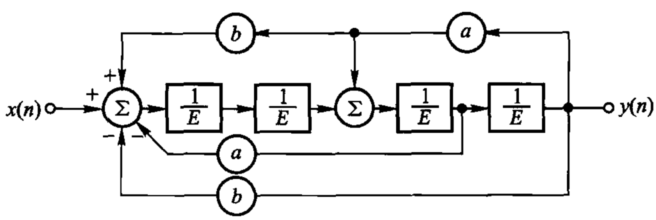
列写状态方程和输出方程。

12-4 给定系统流图如题图 12-4 所示，列写状态方程和输出方程。



题图 12-4

12-5 给定离散时间系统框图如题图 12-5 所示，列写状态方程和输出方程。



题图 12-5

12-6 (1) 给定系统用微分方程描述为

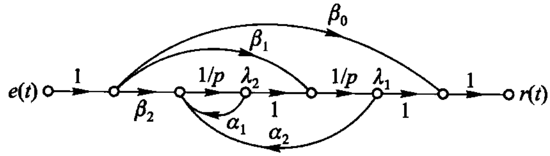
$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}r(t)+a_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t)+a_2r(t)\doteq b_0\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}e(t)+b_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e(t)+b_2e(t)$$

用题图 12－6 的流图形式模拟该系统，列写对应于题图 12－6 形式的状态方程，并求 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_0,\beta_1,\beta_2$ 与原方程系数之间的关系。

(2) 给定系统用微分方程描述为

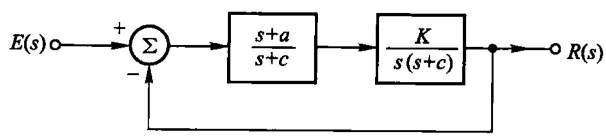
$$\frac{d^2}{dt^2}r(t)+4\frac{d}{dt}r(t)+3r(t)=\frac{d^2}{dt^2}e(t)+6\frac{d}{dt}e(t)+8e(t)$$

求对应于(1)问所示状态方程的各系数。

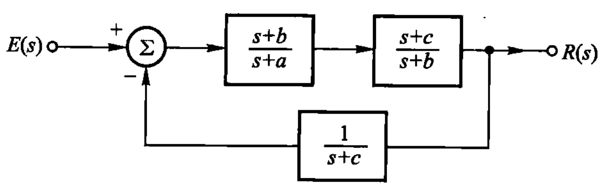


题图 12－6

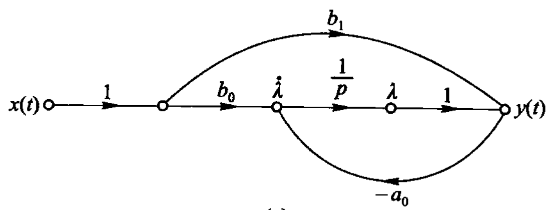
12－7 试将题图 12－7(a)和(b)分别改画为以一阶流图组合的形式，一阶流图的结构如题图 12－7(c)所示，并列写系统的状态方程和输出方程。在图(c)中传输算子为 $H(p)=\dfrac{b_1+\dfrac{b_0}{p}}{1+\dfrac{a_0}{p}}$。考虑图中结点 λ 之后增益为 1 的通路在本题中能否省去？



(a)



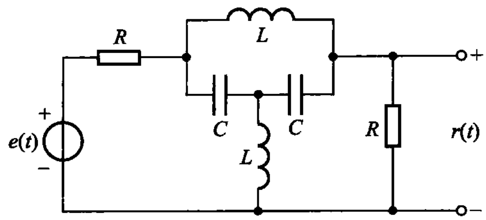
(b)



(c)

题图 12－7

12－8 列写题图 12－8 所示网络的状态方程和输出方程表示。



题图 12－8

12－9 已知

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$$

借助拉氏变换求逆的方法计算 e^{At}。

12－10 给定系统的状态方程和初始条件为

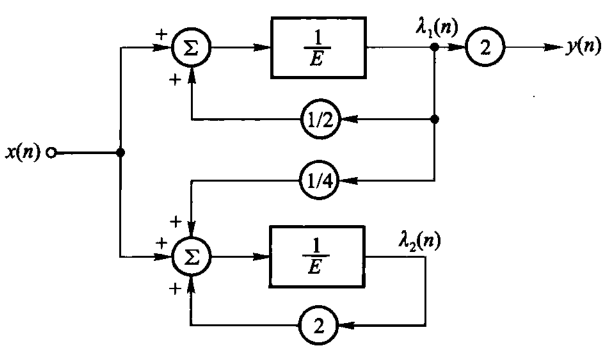
$$\begin{bmatrix}\dot{\lambda}_1(t)\\\dot{\lambda}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-2\\1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1(t)\\\lambda_2(t)\end{bmatrix};\quad\begin{bmatrix}\lambda_1(0_-)\\\lambda_2(0_-)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$$

用拉氏变换方法求解该系统。

12－11 若每年从外地进入某城市的人口是上一年外地人口的 α 倍，而离开该市人口是上一年该市人口的 β 倍，全国每年人口的自然增长率为 γ 倍（α,β,γ 都以百分比表示）。试建立一个离散时间系统的状态方程，描述该城市和外地人口的动态发展规律。为了预测未来若干年后的人口数量，还需要知道哪些数据？

12－12 一离散系统如题图 12－12 所示。

(1) 当输入 $x(n)=\delta(n)$ 时，求 $\lambda_1(n)$ 和 $\lambda_2(n)$ 及 $y(n)=h(n)$；



题图 12－12

(2) 列出系统的差分方程。

12-13 已知一离散系统的状态方程和输出方程表示为

$$\begin{bmatrix}\lambda_1(n+1)\\ \lambda_2(n+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ a & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1(n)\\ \lambda_2(n)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}x(n)$$

$$y(n)=[1,1]\begin{bmatrix}\lambda_1(n)\\ \lambda_2(n)\end{bmatrix}$$

给定当 $n\geqslant 0$ 时，$x(n)=0$ 和 $y(n)=8(-1)^n-5(-2)^n$，求：

(1) 常数 a,b；

(2) $\lambda_1(n)$和 $\lambda_2(n)$的闭式解。

12-14 已知一离散系统的状态方程和输出方程表示为

$$\begin{cases}\lambda_1(n+1)=\lambda_1(n)-\lambda_2(n)\\ \lambda_2(n+1)=-\lambda_1(n)-\lambda_2(n)\end{cases}$$

$$y(n)=\lambda_1(n)\lambda_2(n)+x(n)$$

(1) 给定$\lambda_1(0)=2,\lambda_2(0)=2$,求状态方程的零输入解；

(2) 求系统的差分方程表示式；

(3) 给定(1)的起始条件，且给定 $x(n)=2^n, n\geqslant 0$。求输出响应 $y(n)$，并求(2)中差分方程的特解。

12-15 已知两个系统有这样的关系

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\lambda}(t)+\boldsymbol{B}e(t)\\ r_1(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{\lambda}(t)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\gamma}(t)+\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}e(t)\\ r_2(t)=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\gamma}(t)\end{cases}$$

证明：如果系统起始是静止的，则这两个系统的输出冲激响应有下列关系

$$h_1(t)=h_2(-t)$$

12-16 给定线性时不变系统的状态方程和输出方程

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\lambda}(t)+\boldsymbol{B}e(t)\\ r(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{\lambda}(t)\end{cases}$$

其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2 & 2 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ 1 & -4 & 0\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}=[1,0,0]$$

(1) 检查该系统的可控性和可观性；

(2) 求系统的转移函数。

12-17 判断习题 12-1 的可控性与可观性，并求系统函数。

12-18 已知线性时不变系统状态方程的参数矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ -6 & -2 & 3 & 0\\ -3 & -2 & 0 & 4\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 3\\ 2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}=[-4,-3,1,1]$$

求:(1) 将参数矩阵化为 $\boldsymbol{A}$ 对角线形式;

(2) 判断系统可控性与可观性;

(3) 系统函数 $H(s)$。

12-19 考虑可控且可观的两个单输入-单输出系统 S_1和 S_2,它们的状态方程和输出方程分别为

$S_1:\lambda_1(t)=\boldsymbol{A}\lambda_1(t)+\boldsymbol{B}_1e_1(t)$

$r_1(t)=\boldsymbol{C}_1\lambda_1(t)$

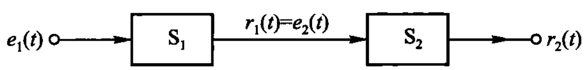
其中 $\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3 & -4\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{C}_1=[2,1]$。

$S_2:\dot{\lambda}_2(t)=A_2\lambda_2(t)+B_2e_2(t)$

$r_2(t)=C_2\lambda_2(t)$

其中 $A_2=-2,B_2=1,C_2=1$。

现在考虑串联系统如题图 12-19 所示。



题图 12-19

(1) 求串联系统的状态方程和输出方程,令

$$\boldsymbol{\lambda}(t)=\begin{bmatrix}\lambda_1(t)\\ \lambda_2(t)\end{bmatrix}$$

(2) 检查串联系统的可控性和可观性;

(3) 求系统 S_1和 S_2分别的转移函数及串联系统的转移函数;串联系统转移函数有无零极点相消现象?(2)的结果说明什么?

12-20 已知线性时不变系统的状态方程和输出方程表示为

$$\boldsymbol{\lambda}_{k\times 1}(t)=\boldsymbol{A}_{k\times k}\boldsymbol{\lambda}_{k\times 1}(t)+\boldsymbol{B}_{k\times 1}e(t)$$

$$r(t)=\boldsymbol{C}_{1\times k}\boldsymbol{\lambda}_{k\times 1}+\boldsymbol{D}e(t)$$

且有 $\boldsymbol{CB}=0,\boldsymbol{CAB}=0,\cdots,\boldsymbol{CA}^{k-1}\boldsymbol{B}=0$。

证明:该系统不可能同时完全可控和完全可观。

12-21 利用状态变量方法分析前文习题 11-11(题图 11-11)所示倒立摆系统之稳定性(采用比例-微分反馈控制):

(1) 建立该系统的状态方程,建议选状态变量 $\lambda_1=\theta,\lambda_2=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$;

(2) 利用 $\boldsymbol{A}$ 矩阵求特征矢量和特征值 α_1、α_2；

(3) 为使系统稳定，K_1、K_2 应满足什么条件？（其结果应与习题 11－11 之答案相同。）

附录四　几何级数的求值公式表

序号	公　式
1	$\sum_{n=0}^{n_2} a^n = \begin{cases} \dfrac{1-a^{n_2+1}}{1-a} & a \neq 1 \\ n_2+1 & a=1 \end{cases}$
2	$\sum_{n=n_1}^{n_2} a^n = \begin{cases} \dfrac{a^{n_1}-a^{n_2+1}}{1-a} & a \neq 1 \\ n_2-n_1+1 & a=1 \end{cases}$
3	$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \dfrac{1}{1-a} \qquad \lvert a \rvert < 1$
4	$\sum_{n=1}^{\infty} a^n = \dfrac{a}{1-a} \qquad \lvert a \rvert < 1$
5	$\sum_{n=n_1}^{\infty} a^n = \dfrac{a^{n_1}}{1-a} \qquad \lvert a \rvert < 1$

注:对于公式 2 中,$n_1 \leqslant n_2$,n_1 与 n_2 可以是正数,也可以是负数。

下面证明表中的各公式

(一) 公式 1

$$\sum_{n=0}^{n_2} a^n = \frac{1-a^{n_2+1}}{1-a} \qquad (a \neq 1)$$

以$(1-a)$乘等式两端,左端得到

$$(1+a+a^2+\cdots+a^{n_2})(1-a)$$

经逐项相乘展开,即可证明它与等式右端相等。

$$\sum_{n=0}^{n_2} a^n = n_2+1 \qquad (a=1)$$

很明显,级数由 n_2+1 项组成,其中每项都是 1。

(二) 公式 2

利用上述结果容易构成

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} a^n = \sum_{n=0}^{n_2} a^n - \sum_{n=0}^{n_1-1} a^n$$

$$= \frac{1-a^{n_2+1}}{1-a} - \frac{1-a^{n_1}}{1-a}$$

$$= \frac{a^{n_1}-a^{n_2+1}}{1-a} \qquad (a \neq 1)$$

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} a^n = n_2 + 1 - n_1$$

$$= n_2 - n_1 + 1 \qquad (a = 1)$$

(三) 公式 5

注意到,若$|a|<1$,则有

$$\lim_{n \to \infty} a^n = 0$$

$$\sum_{n=n_1}^{\infty} a^n = \lim_{n_2 \to \infty} \sum_{n_1}^{n_2} a^n$$

$$= \lim_{n_2 \to \infty} \left[\frac{a^{n_1}}{1-a} - \frac{a^{n_2+1}}{1-a} \right]$$

$$= \frac{a^{n_1}}{1-a} \qquad (|a|<1 \quad n_1 \geqslant 0)$$

(四) 公式3 与公式 4

令公式 5 中的 n_1 分别等于 0 或 1,即可得到

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a} \qquad (|a|<1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n = \frac{a}{1-a} \qquad (|a|<1)$$

(五) 在以上证明过程中,假定n_1 和 n_2 都是正数,现可将结果推广至 n_1,n_2 为负数的一般情况

若 $n_1<0\leqslant n_2$,则有

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} a^n = \sum_{n=n_1}^{-1} a^n + \sum_{n=0}^{n_2} a^n$$

以 $m=-n$ 置换等式右端第一项中的序数

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} a^n = \sum_{m=1}^{-n_1} \left(\frac{1}{a}\right)^m + \sum_{n=0}^{n_2} a^n$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{a}\right) - \left(\frac{1}{a}\right)^{-n_1+1}}{1-\frac{1}{a}} + \frac{1-a^{n_2+1}}{1-a}$$

$$=\frac{a^{n_1}-a^{n_2+1}}{1-a}\qquad (a\neq 1)$$

若 $n_1<n_2\leqslant 0$,再次利用 $m=-n$ 置换,得到

$$\sum_{n=n_1}^{n_2}a^n=\sum_{m=-n_2}^{-n_1}\left(\frac{1}{a}\right)^m$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{a}\right)^{-n_2}-\left(\frac{1}{a}\right)^{-n_1+1}}{1-\frac{1}{a}}$$

$$=\frac{a^{n_1}-a^{n_2+1}}{1-a}\qquad (a\neq 1)$$

最后,对于 $a=1$,求上式 $a\to 1$ 的极限,借助洛比达法则即可得到

$$\sum_{n=n_1}^{n_2}a^n=n_2-n_1+1\qquad (a=1)$$

至此,表中的公式全部得到证明。

附录五　序列的 z 变换表

序号	序列	单边 z 变换	收敛域
	$x(n)$	$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}$	$\|z\|>R$
1	$\delta(n)$	1	$\|z\|\geqslant 0$
2	$\delta(n-m)(m>0)$	z^{-m}	$\|z\|>0$
3	$u(n)$	$\frac{z}{z-1}$	$\|z\|>1$
4	n	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$\|z\|>1$
5	n^2	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$	$\|z\|>1$
6	n^3	$\frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$	$\|z\|>1$
7	n^4	$\frac{z(z^3+11z^2+11z+1)}{(z-1)^5}$	$\|z\|>1$
8	n^5	$\frac{z(z^4+26z^3+66z^2+26z+1)}{(z-1)^6}$	$\|z\|>1$
9	a^n	$\frac{z}{z-a}$	$\|z\|>\|a\|$
10	na^n	$\frac{az}{(z-a)^2}$	$\|z\|>\|a\|$
11	n^2a^n	$\frac{az(z+a)}{(z-a)^3}$	$\|z\|>\|a\|$
12	n^3a^n	$\frac{az(z^2+4az+a^2)}{(z-a)^4}$	$\|z\|>\|a\|$
13	n^4a^n	$\frac{az(z^3+11az^2+11a^2z+a^3)}{(z-a)^5}$	$\|z\|>\|a\|$
14	n^5a^n	$\frac{az(z^4+26az^3+66a^2z^2+26a^3z+a^4)}{(z-a)^6}$	$\|z\|>\|a\|$
15	$(n+1)a^n$	$\frac{z^2}{(z-a)^2}$	$\|z\|>\|a\|$

续表

序号	序列	单边 z 变换	收敛域
16	$\frac{(n+1)\cdots(n+m)a^n}{m!}$ $(m\geqslant 1)$	$\frac{z^{m+1}}{(z-a)^{m+1}}$	$\|z\|>\|a\|$
17	e^{bn}	$\frac{z}{z-e^b}$	$\|z\|>\|e^b\|$
18	$e^{jn\omega_0}$	$\frac{z}{z-e^{j\omega_0}}$	$\|z\|>1$
19	$\sin(n\omega_0)$	$\frac{z\sin\omega_0}{z^2-2z\cos\omega_0+1}$	$\|z\|>1$
20	$\cos(n\omega_0)$	$\frac{z(z-\cos\omega_0)}{z^2-2z\cos\omega_0+1}$	$\|z\|>1$
21	$\beta^n\sin(n\omega_0)$	$\frac{\beta z\sin\omega_0}{z^2-2\beta z\cos\omega_0+\beta^2}$	$\|z\|>\|\beta\|$
22	$\beta^n\cos(n\omega_0)$	$\frac{z(z-\beta\cos\omega_0)}{z^2-2\beta z\cos\omega_0+\beta^2}$	$\|z\|>\|\beta\|$
23	$\sin(n\omega_0+\theta)$	$\frac{z[z\sin\theta+\sin(\omega_0-\theta)]}{z^2-2z\cos\omega_0+1}$	$\|z\|>1$
24	$\cos(n\omega_0+\theta)$	$\frac{z[z\cos\theta-\cos(\omega_0-\theta)]}{z^2-2z\cos\omega_0+1}$	$\|z\|>1$
25	$na^n\sin(n\omega_0)$	$\frac{z(z-a)(z+a)a\sin\omega_0}{(z^2-2az\cos\omega_0+a^2)^2}$	
26	$na^n\cos(n\omega_0)$	$\frac{az[z^2\cos\omega_0-2az+a^2\cos\omega_0]}{(z^2-2az\cos\omega_0+a^2)^2}$	
27	$\sinh(n\omega_0)$	$\frac{z\sinh\omega_0}{z^2-2z\cosh\omega_0+1}$	
28	$\cosh(n\omega_0)$	$\frac{z(z-\cosh\omega_0)}{z^2-2z\cosh\omega_0+1}$	
29	$\frac{a^n}{n!}$	$e^{\frac{a}{z}}$	
30	$\frac{1}{(2n)!}$	$\cosh(z^{-\frac{1}{2}})$	
31	$\frac{(\ln a)^n}{n!}$	$a^{1/z}$	
32	$\frac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$	$\ln\left(\frac{z}{z-1}\right)$	
33	$\frac{n(n-1)}{2!}$	$\frac{z}{(z-1)^3}$	
34	$\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}$	$\frac{z}{(z-1)^{m+1}}$	

习题答案

第七章

7-4 (1) 周期序列,周期为 14

(2) 非周期序列

7-5 (1) $3^{-n}u(n)$

(2) $\frac{3-3^{-n}}{2}u(n)$

(3) $\frac{1}{2(3^n)}\{(3^{n+1}-1)[u(n)-u(n-5)]+(3^5-1)u(n-5)\}$

$=\frac{3-3^{-n}}{2}[u(n)-u(n-5)]+\frac{121}{3^n}u(n-5)$

7-6 $\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}u(n-1)$

7-7 $-3^{-n}u(-n-1)$

7-8 $b_0y(n)+b_1y(n-1)=a_0x(n)+a_1x(n-1)$

7-9 $y(n)-b_1y(n-1)-b_2y(n-2)=a_0x(n)+a_1x(n-1)$

7-10 当 $0\leqslant n\leqslant 7$ 时,$y(n)=b_r$(下标 $r=n$)

当 $n<0,n>7$ 时,$y(n)=0$

7-11 (1) $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ (2) 2^{n-1}

(3) $(-3)^{n-1}$ (4) $\left(-\frac{2}{3}\right)^n$

7-12 (1) $4(-1)^n-12(-2)^n$

(2) $(2n+1)(-1)^n$

(3) $\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)+2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

7-13 $3^n-(n+1)2^n$

7-14 $\frac{1}{36}[(-5)^{n+1}+6n+5]$

7-15 $\frac{13}{9}(-2)^n+\frac{1}{3}n-\frac{4}{9}$

7-16 $\left(-\frac{3}{4}n-\frac{9}{16}\right)(-1)^n+\frac{9}{16}(3^n)$

7-17 $y(n)=\frac{1}{2}\sin n+\frac{1}{2}(\tan 1)(\cos n)-\frac{1}{2}(\tan 1)\left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]$

$$=\frac{1}{2(1+\cos 2)}\left[\sin n+\sin(n+2)-\sin 2\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

7-18 (1) $y(n)=\sum_{k=0}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$

(2) 应假设特解函数式为 $D_2n^2+D_1n$

7-19 $y(n)=\sum_{k=0}^{n}k^3=\frac{1}{4}n^4+\frac{2}{4}n^3+\frac{1}{4}n^2$

$$=\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2$$

7-20 (1) $y(n)-7y(n-1)+10y(n-2)$

$$=14x(n)-85x(n-1)+111x(n-2)$$

(2) $y(n)=2\{[2^n+3(5)^n+10]u(n)-[2^{n-10}+3(5^{n-10})+10]u(n-10)\}$

7-21 $y(n)=2\left(\frac{2}{3}\right)^n$

7-22 $y(n)-(1+a)y(n-1)=x(n)$

$y(12)=142.73$ 元

7-23 $1\,000y(n)-900y(n-1)=x(n)$

$y(n)=\underbrace{-0.5(0.9)^n}_{\text{自由}}+\underbrace{0.5}_{\text{强迫}}\qquad y(\infty)=0.5$

7-24 (1) $y\left(nT+\frac{T}{2}\right)=\frac{C_1}{C_1+C_2}x(nT)+\frac{C_2}{C_1+C_2}y(nT)$

(2) $y(n+1)-\frac{C_2}{C_1+C_2}y(n)=\frac{C_1}{C_1+C_2}x(n)$ 或 $y(n)-\frac{C_2}{C_1+C_2}y(n-1)$

$$=\frac{C_1}{C_1+C_2}x(n-1)$$

(3) $y(n)=\left[1-\left(\frac{C_2}{C_1+C_2}\right)^n\right]u(n)$

7-25 $\lim_{N\to\infty}v(n)=E\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

7-26 $y(n)=(1-0.9^n)u(n)$

7-27 $y(n)=2y(n-1)+1,y(n)=2^n-1$

7-28 (1)、(2)、(8)、(9)、(12)因果、稳定

(3)、(7)非因果、稳定。(4)、(6)、(11)因果、不稳定

(5)、(10)非因果、不稳定

7-29 (1) 非线性、时不变

(2) 线性、时变

(3) 非线性、时不变

(4) 线性、时不变

7-30 (1) $h(n)=g(n)-g(n-1)$

(2) $g(n)=\sum_{k=0}^{\infty}h(n-k)$

7-31 (1) $y(n)=\delta(n)+3\delta(n-1)+4\delta(n-2)+3\delta(n-3)+\delta(n-4)$

(2) $y(n)=\delta(n+4)+2\delta(n+3)+\delta(n+2)+\delta(n+1)+2\delta(n)$

(3) $y(n)=\dfrac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{\beta-\alpha}u(n)$

(4) $y(n)=\delta(n-2)$

7-32 (1) $y(n)=\delta(n)+\delta(n-6)+2[\delta(n-1)+\delta(n-5)]$
$+3[\delta(n-2)+\delta(n-4)]+4\delta(n-3)$

(2) $y(n)=2^n[u(n)-u(n-4)]-2^{n-2}[u(n-2)-u(n-6)]$

(3) $y(n)=\dfrac{1-0.5^{n+1}}{1-0.5}u(n)-\dfrac{1-0.5^{n-4}}{1-0.5}u(n-5)$

7-33 $y(n)=\dfrac{1-0.8^{n+1}}{1-0.8}u(n)-\dfrac{1-0.8^{n-2}}{1-0.8}u(n-3)$

7-34 $N_4=N_0+N_2 \quad N_5=N_1+N_3$

7-35 $h(n)=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n & n\text{ 为偶数}\\ 0 & n\text{ 为奇数}\end{cases}$

第八章

8-1 (1) $\dfrac{2z}{2z-1} \quad \left(|z|>\dfrac{1}{2}\right)$

(2) $\dfrac{4z}{4z+1} \quad \left(|z|>\dfrac{1}{4}\right)$

(3) $\dfrac{z}{z-3} \quad (|z|>3)$

(4) $\dfrac{1}{1-3z} \quad \left(|z|<\dfrac{1}{3}\right)$

(5) $\dfrac{2z}{2z-1} \quad \left(|z|<\dfrac{1}{2}\right)$

(6) $z \quad (|z|<\infty)$

(7) $\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{2z}\right)^{10}}{1-\dfrac{1}{2z}} \quad (|z|>0)$

(8) $\dfrac{z(12z-5)}{(2z-1)(3z-1)} \quad \left(|z|>\dfrac{1}{2}\right)$

(9) $1-\dfrac{1}{8}z^{-3} \quad (|z|>0)$

8-2 $\dfrac{-1.5z}{(z-0.5)(z-2)} \quad (0.5<|z|<2)$

8-3 (1) $\dfrac{Az^2\cos\phi-Arz\cos(\omega_0-\phi)}{z^2-2rz\cos\omega_0+r^2} \quad (|z|>r)$

(2) $\dfrac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}} \quad (|z|>0)$

8-4 (1) $\delta(n)$

(2) $\delta(n+3)$

(3) $\delta(n-1)$

(4) $\delta(n)+2\delta(n+1)-2\delta(n-2)$

(5) $a^n u(n)$

(6) $-a^n u(-n-1)$

8-5 (1) $(-0.5)^n u(n)$

(2) $\left[4\left(-\frac{1}{2}\right)^n-3\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right]u(n)$

(3) $(-0.5)^n u(n)$

(4) $-a\delta(n)+\left(a-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{a}\right)^n u(n)$

8-6 $10(2^n-1)u(n)$

8-9 $\frac{u(-n)}{(-n)!}$

8-10 (1) $\left[20\left(\frac{1}{2}\right)^n-10\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]u(n)$

(2) $5[1+(-1)^n]u(n)$

(3) $\left\{\frac{\sin[(n+1)\omega]+\sin(n\omega)}{\sin\omega}\right\}u(n)$

8-11 (1) $n6^{n-1}u(n)$

(2) $\delta(n)-\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)u(n)$

8-12 (1) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n-2^n\right]u(n)$

(2) $\left[2^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]u(-n-1)$

(3) $\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)+2^n u(-n-1)$

8-13 (1) $x(0)=1$　$x(\infty)$不存在

(2) $x(0)=1$　$x(\infty)=0$

(3) $x(0)=0$　$x(\infty)=2$

8-14 $x(n)=(-1)^{n+1}\quad\frac{a^n}{n}u(n-1)$

8-17 (1) $\frac{b}{b-a}[a^n u(n)+b^n u(-n-1)]$

(2) $a^{n-2}u(n-2)$

(3) $\frac{1-a^n}{1-a}u(n)$

8-18 $\frac{1-a^{n+1}}{1-a}u(n)-\frac{1-a^{n+1-N}}{1-a}u(n-N)$

8-19 (1) 1　$(|z|\geqslant 0)$

(2) $\frac{1}{1-100z}$　$(|z|>0.01)$

(3) $\dfrac{e^{-b}z\sin\omega_0}{z^2-2e^{-b}z\cos\omega_0+e^{-2b}}$ $(|z|>e^{-b})$

8-20 $x(n)=x_1(n)*x_2(n)$，为得到 $x_2(n)$应有

D 运算：$X(z)=X_1(z)X_2(z)$

$$\ln[X(z)]=\ln[X_1(z)]+\ln[X_2(z)]$$

$$\mathscr{Z}^{-1}\{\ln[X(z)]\}=\hat{x}_1(n)+\hat{x}_2(n)=\hat{x}(n)$$

L 运算：当 $\hat{x}(n)=\hat{x}_1(n)+\hat{x}_2(n)$时

可得到 $\hat{y}(n)=\hat{x}_2(n)$ 即滤除 $\hat{x}_1(n)$

D^{-1}运算：

$\mathscr{Z}[\hat{x}_2(n)]=\hat{X}_2(z)$或$\mathscr{Z}[\hat{y}(n)]=\hat{Y}(z)$

$\exp[\hat{X}_2(z)]=X_2(z)$或$\exp[\hat{Y}(z)]=Y(z)$

$\mathscr{Z}^{-1}[X_2(z)]=x_2(n)$或$\mathscr{Z}^{-1}[Y(z)]=y(n)$

最后有 $y(n)=x_2(n)$

8-21 (1) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}\cos\left(\dfrac{2n\pi}{3}\right)+\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\sin\left(\dfrac{2n\pi}{3}\right)$ $(n\geqslant 0)$

(2) $\approx 9.26+0.66(-0.2)^n-0.2(0.1)^n$ $(n\geqslant 0)$

(3) $0.5-0.45(0.9)^n$ $(n\geqslant 0)$

(4) $0.5+0.45(0.9)^n$ $(n\geqslant 0)$

(5) $\dfrac{n}{6}+\dfrac{5}{36}-\dfrac{5}{36}(-5)^n$ $(n\geqslant 0)$

(6) $\dfrac{1}{9}[3n-4+13(-2)^n]$ $(n\geqslant 0)$

8-22 $\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n E,(n=0,1,2,\cdots,N)$

8-23 (1) 稳定

(2) 不稳定

(3) 不稳定(边界稳定)

(4) 不稳定(边界稳定)

8-24 (1) $h(n)=(-3)^n u(n)$

(2) $y(n)=\dfrac{1}{32}[-9(-3)^n+8n^2+20n+9]u(n)$

8-25 $y(n)=b_1y(n-1)+b_2y(n-2)+ax(n-1)$

$$H(z)=\frac{az^{-1}}{1-b_1z^{-1}-b_2z^{-2}}$$

$$h(n)=\frac{a}{P_1-P_2}(P_1^n-P_2^n)u(n)$$

其中 $P_1,P_2=\dfrac{b_1\pm\sqrt{b_1^2+4b_2}}{2}$

8-26 (1) $H(z)=\dfrac{z}{3z-6}$，$h(n)=\dfrac{1}{3}(2^n)u(n)$

(2) $H(z)=1-5z^{-1}+8z^{-3}$, $h(n)=\delta(n)-5\delta(n-1)+8\delta(n-3)$

(3) $H(z)=\dfrac{z}{z-0.5}$, $h(n)=0.5^n u(n)$

(4) $H(z)=\dfrac{z^3}{(z-1)^3}$, $h(n)=\dfrac{1}{2}(n+1)(n+2)u(n)$

(5) $H(z)=\dfrac{z^2-3}{z^2-5z+6}$, $h(n)=-\dfrac{1}{2}\delta(n)-\dfrac{1}{2}(2)^n u(n)+2(3)^n u(n)$

8-27 当 $10<|z|\leqslant\infty$ 时，$h(n)=(0.5^n-10^n)u(n)$，系统是因果，不稳定的；当 $0.5<|z|<10$ 时，$h(n)=0.5^n u(n)+10^n u(-n-1)$，系统是非因果，稳定的

8-29 (1) $H(z)=\dfrac{z}{z+1}$ $h(n)=(-1)^n u(n)$

(2) $y(n)=5[1+(-1)^n]u(n)$

8-30 在 $u(n)$ 作用下，$y(n)=\dfrac{a}{a-1}a^n u(n)-\dfrac{1}{a-1}u(n)$

在 $e^{jn\omega}u(n)$ 作用下，$y(n)=\dfrac{a}{a-e^{j\omega}}a^n u(n)-\dfrac{e^{j\omega}}{a-e^{j\omega}}e^{jn\omega}u(n)$

上两式右边的第一项为瞬态响应，第二项为稳态响应

8-31 $H(e^{j\omega})=e^{-j\frac{3\omega}{2}}(\cos\omega)\cos\left(\dfrac{\omega}{2}\right)$

8-32 $y(n)-ky(n-1)=x(n)$

$$H(e^{j\omega})=\frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega}-k}$$

$$|H(e^{j\omega})|=\frac{1}{\sqrt{1+k^2-2k\cos\omega}}$$

$$\varphi(\omega)=-\arctan\left(\frac{k\sin\omega}{1-k\cos\omega}\right)$$

8-34 (1) $y(n)=\sum\limits_{i=0}^{M-1}a^i x(n-i)$ $(M=8)$

(2) $H(z)=\sum\limits_{i=0}^{M-1}a^i z^{-i}=\dfrac{1-(az^{-1})^M}{1-az^{-1}}$

(3) $h(n)=a^n[u(n)-u(n-M)]=\sum\limits_{i=0}^{M-1}a^i\delta(n-i)$

8-35 $y(n)=x(n)-\cos\left(\dfrac{2\pi}{N}\right)x(n-1)+2\cos\left(\dfrac{2\pi}{N}\right)y(n-1)-y(n-2)$

$$H(z)=\frac{1-z^{-1}\cos\left(\frac{2\pi}{N}\right)}{1-2z^{-1}\cos\left(\frac{2\pi}{N}\right)+z^{-2}}$$

$$h(n)=\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)u(n)$$

8-36 (1) $H(z)=\dfrac{z}{z-\frac{1}{3}}$ $\left(|z|>\dfrac{1}{3}\right)$

$$h(n)=\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

(2) $x(n)=(0.5)^n u(n-1)$

(3) 零点位于 $z=0$,极点位于 $z=\frac{1}{3}$

(4) 呈低通特性,最大值为 1.5,最小值为 0.75

8-37 (1) $H(z)=\frac{10}{3}\left(\frac{z}{z-\frac{1}{2}}\right)-\frac{7}{3}\left(\frac{z}{z-\frac{1}{4}}\right)$

$\left(|z|>\frac{1}{2}\right)$

$h(n)=\left[\frac{10}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{7}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]u(n)$

(2) 零点位于 $z=0$ 和 $-\frac{1}{3}$,极点位于 $z=\frac{1}{4}$和$\frac{1}{2}$

(3) 呈低通特性,最大值为$\frac{32}{9}$,最小值为$\frac{16}{45}$

8-38 (1) 零点位于 $a\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0}$和 $a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0}$都在单位圆之外,极点位于 $a^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0}$和 $a^{-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0}$都在单位圆之内

(2) 由 $z=\mathrm{e}^{sT}$或$s=\frac{1}{T}\ln z$,令 $T=1$,可求得对应 s 平面的零点位于 $\ln a+\mathrm{j}\omega_0$ 和 $\ln a-\mathrm{j}\omega_0$,而极点位于 $-\ln a+\mathrm{j}\omega_0$ 和 $-\ln a-\mathrm{j}\omega_0$ 为全通系统

第九章

9-1 $X_p(k)=2\left[1+\cos\left(\frac{\pi}{2}k\right)\right]$或$X_p(0)=4, X_p(1)=2, X_p(2)=0, X_p(3)=2$

9-4 (1) 正确 (2) 不正确 (3) 正确

(4) 不正确 若改为“$X_p(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(\frac{2\pi}{5}\right)k}\cdots$”则正确

9-5 $X_{p2}(k)=X_{p1}\left(\frac{k}{2}\right)(1+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi k})$

也即当 k 为奇 则 $X_{p2}(k)=0$

当 k 为偶 则 $X_{p2}(k)=2X_{p1}\left(\frac{k}{2}\right)$

9-6 与习题 9-1 答案相同

9-8 $X(0)=5, X(1)=2+\mathrm{j}, X(2)=-5, X(3)=2-\mathrm{j}$

9-9 (1) $X(k)=1$

(2) $X(k)=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}n_0 k}$

(3) $X(k)=\frac{1-a^N}{1-a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}k}}$

(以上各式中 k 的范围限于 $0\leqslant k\leqslant N-1$)

9-10 (1) $X(k)=\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 N}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\omega_0-\frac{2\pi}{N}k\right)}}$

(2) $X(k)=\frac{(\sin\omega_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}k}-\sin(\omega_0 N)+\sin(\omega_0 N-\omega_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}k}}{1-2(\cos\omega_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}k}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{4\pi}{N}k}}$

(3) $X(k)=\dfrac{1-(\cos\omega_0)e^{-j\frac{2\pi}{N}k}-\cos(\omega_0 N)+\cos(\omega_0 N-\omega_0)e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}{1-2\cos\omega_0 e^{-j\frac{2\pi}{N}k}+e^{-j\frac{4\pi}{N}k}}$

(4) 对于第(1)问有 $X(k)=N\delta(k-1)$

对于第(2)问有 $X(k)=\dfrac{N}{2j}[\delta(k-1)-\delta(k-N+1)]$

对于第(3)问有 $X(k)=\dfrac{N}{2}[\delta(k-1)+\delta(k-N+1)]$

9-14 (1) $\dfrac{1}{2}[X((k-l))_N+X((k+l))_N]R_N(k)$

(2) $\dfrac{1}{2j}[X((k-l))_N-X((k+l))_N]R_N(k)$

9-15 $X(0)=10, X(1)=-2+2j, X(2)=-2, X(3)=-2-2j$

$H(0)=10, H(1)=2-2j, H(2)=2, H(3)=2+2j$

$Y(0)=100, Y(1)=8j, Y(2)=-4, Y(3)=-8j$

9-17 (1) 设 $x(n)*x(n)=y_1(n)$

$y_1(0)=\dfrac{1}{4}, y_1(1)=1, y_1(2)=2, y_1(3)=2\dfrac{1}{2}, y_1(4)=2,$

$y_1(5)=1, y_1(6)=\dfrac{1}{4}$

(2) 设 $x(n)\circledast x(n)=y_2(n)$ $N=4$

$y_2(0)=2\dfrac{1}{4}, y_2(1)=2, y_2(2)=2\dfrac{1}{4}, y_2(3)=2\dfrac{1}{2}$

(3) 答案同(1)

(4) $L=7$

9-18 (1) $\dfrac{N}{2}\sin\left(\dfrac{2\pi n}{N}\right)R_N(n)$

(2) $\dfrac{N}{2}\cos\left(\dfrac{2\pi n}{N}\right)R_N(n)$

(3) $-\dfrac{N}{2}\cos\left(\dfrac{2\pi n}{N}\right)R_N(n)$

9-22 $X(k)=N\delta(k)$

9-24 (1) $\mathscr{Z}[x(n)]=\dfrac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$

(2) $\mathrm{DFT}[x(n)]=N\delta(k)$ (见习题 9-22)

(3) $X(e^{j\omega})=\dfrac{\sin\left(\dfrac{N}{2}\omega\right)e^{-j\frac{N}{2}\omega}}{\sin\left(\dfrac{\omega}{2}\right)e^{-j\frac{\omega}{2}}}$

$|X(e^{j\omega})|=\left|\dfrac{\sin\left(\dfrac{N}{2}\omega\right)}{\sin\left(\dfrac{\omega}{2}\right)}\right|$

当 $\omega=0$ 时 $|X(e^{j\omega})|=N$

当 $\omega=\dfrac{2\pi}{N}k$ 时 $|X(e^{j\omega})|=0$

9-25 (1) $e^{j\frac{2\pi}{N}k}X(-k)$

(2) $X\left(k+\frac{N}{2}\right)$

(3) $[1+(-1)^k]X\left(\frac{k}{2}\right)$

(4) $X(2k)$

(5) $X\left(\frac{k}{2}\right)$

(6) $X(k)$

(7) $\frac{1}{2}\left[X(k)+X\left(k+\frac{N}{2}\right)\right]$

本题答案限于 $0\leqslant k\leqslant N-1$,也即以上各式中都省略了符号 $R_N(k)$

9-26 此矩阵相乘的过程与图 9-17 之 FFT 流程图对应

9-34 由给定条件求得待选参数应满足以下条件:

$T_1>0.2$ s, $T_s\leqslant 0.4$ ms, $N\geqslant 500$

选 $N=512$, $T_s=0.4$ ms, $T_1=0.204\ 8$ s

9-35 (1) $\frac{1}{4}\begin{bmatrix}6 & -2\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

(2) $\frac{1}{4}\begin{bmatrix}6 & 0\\ -2 & 0\end{bmatrix}$

(3) $\frac{1}{4}\begin{bmatrix}6 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}$

9-36 适当考虑补零规律,可省去复数乘法运算

第十章

10-3 (1) $N=5$, $\Omega_c=2\pi\times1.263\times10^4$

$H_a(s)=3.149\times10^{24}(s^5+2.568\times10^5s^4+3.298\times10^{10}s^3+2.618\times10^{15}s^2+1.284\times10^{20}s+3.149\times10^{24})^{-1}$

(2) $\varepsilon=0.508\ 85$, $N=3$

$$H_a(s)=\frac{1.219\times10^{14}}{s^3+6.210\times10^4s^2+4.889\times10^9s+1.219\times10^{14}}$$

10-4 (b)

10-5 (1) $a,b,c\geqslant0$, $b\geqslant a$

(2) $F_1(s)$是正实函数

10-6 $F_1(s)$不是正实函数;$F_2(s)$是正实函数

10-8 考尔Ⅰ型:$Z(s)=\dfrac{s^4+10s^2+9}{s^5+20s^3+64s}=\cfrac{1}{s+\cfrac{1}{\frac{1}{10}s+\cfrac{1}{\frac{20}{9}s+\cfrac{1}{\frac{9}{70}s+\cfrac{1}{\frac{35}{9}s}}}}}$

考尔Ⅱ型：$Z(s)=\dfrac{9+10s^2+s^4}{64s+20s^2+s^5}$

$$=\frac{1}{7.11s}+\cfrac{1}{\cfrac{1}{0.112s}+\cfrac{1}{\cfrac{1}{1.718s}+\cfrac{1}{\cfrac{1}{0.022s}+\cfrac{1}{\cfrac{1}{3.61s}}}}}$$

10-9 (1) $Z(s)=\dfrac{10s^4+8s^2+1}{4s^5+10s^3+4s}$

(2) 考尔Ⅰ型：$Z(s)=\cfrac{1}{0.4s+\cfrac{1}{1.47s+\cfrac{1}{2.513s+\cfrac{1}{2.489s+\cfrac{1}{1.087s}}}}}$

考尔Ⅱ型：$Z(s)=\dfrac{1}{4s}+\cfrac{1}{\cfrac{1}{1.375s}+\cfrac{1}{\cfrac{1}{0.628s}+\cfrac{1}{\cfrac{1}{0.762s}+\cfrac{1}{\cfrac{1}{1.52s}}}}}$

10-10 第一个并联谐振回路元件值为 $L_1=\dfrac{1}{2}\ \mathrm{H}, C_1=2\ \mathrm{F}$

另一回路元件值为 $L_2=\dfrac{1}{6}\ \mathrm{H}, C_2=2\ \mathrm{F}$

10-11 (1) $\rho(s)=\dfrac{s(s+\sqrt{7})}{s^2+3s+1}, Z_{11}(s)=\dfrac{1+\rho(s)}{1-\rho(s)}=5.645\,8s+\dfrac{1}{0.354\,3s+1}$

和 $Z'_{11}(s)=\dfrac{1-\rho(s)}{1+\rho(s)}=\cfrac{1}{5.645\,8s+\cfrac{1}{0.354\,3s+1}}$

(2) $\rho(s)=\dfrac{s^2+2.768\,9s+0.333\,3}{s^2+3s+1}$

$Z_{11}(s)=\dfrac{1+\rho(s)}{1-\rho(s)}=8.653\,3s+\cfrac{1}{0.174\,3s+\cfrac{1}{2}}$

(3) $\rho(s)=\dfrac{s^2+2.768\,9s+0.333\,3}{s^2+3s+1}$

$Z_{11}(s)=\dfrac{1-\rho(s)}{1+\rho(s)}=\cfrac{1}{8.653\,3s+\cfrac{1}{0.174\,3s+0.5}}$

10-12 $\rho(s)=\dfrac{\sqrt{7}\left(s+\dfrac{1}{\sqrt{7}}\right)}{s^2+3s+1}, Z_{11}(s)=\dfrac{1+\rho(s)}{1-\rho(s)}=\dfrac{1}{0.177\,1s}+\cfrac{1}{\cfrac{1}{2.822\,9s}+1}$ 和 $Z'_{11}(s)$

$=\dfrac{1-\rho(s)}{1+\rho(s)}=\cfrac{1}{\cfrac{1}{0.177\,1s}+\cfrac{1}{\cfrac{1}{2.822\,9s}+1}}$

两者均为考尔Ⅱ型实现

10－13 (1) $L_1=7.79\ \mathrm{mH}, C_2=0.020\ 4\ \mu\mathrm{F}, L_3=25.20\ \mathrm{mH}, C_4=0.020\ 4\ \mu\mathrm{F}$, $L_5=7.79\ \mathrm{mH}$

(2) $L_1=32.2\ \mathrm{mH}, C_2=0.016\ \mu\mathrm{F}, L_3=32.2\ \mathrm{mH}$

10－14 (1) $H_{\mathrm{al}}(s)=\dfrac{0.982\ 6}{s^2+1.097\ 7s+1.102\ 5}$

(2) $R_{\mathrm{L}}'=0.25$ 用 Ⅱ 型结构,元件值参考表 10－5

10－15 (1) $H_{\mathrm{al}}(s)=\dfrac{0.501\ 2}{s^2+0.644\ 9s+0.707\ 9}$

(2) $R_{\mathrm{L}}'=0.15$,用Ⅱ型结构,$\rho(s)=\dfrac{s^2+0.215\ 7s+0.523\ 3}{s^2+0.644\ 9s+0.707\ 9}$

$$Z_{11}(s)=\frac{1-\rho(s)}{1+\rho(s)}=\cfrac{1}{4.650s+\cfrac{1}{0.348\ 6s+0.15}}$$

10－16 $H_{\mathrm{a}}(s)=s^5(s^5+1.610\times10^7s^4+1.296\times10^{14}s^3+6.444\times10^{20}s^2+1.981\times10^{27}s+3.045\times10^{33})^{-1}$

$C_1=325.3\ \mathrm{pF}, L_2=124.3\ \mu\mathrm{H}, C_3=100.5\ \mathrm{pF}, L_4=124.3\ \mu\mathrm{H}$,

$C_5=325.3\ \mathrm{pF}$

10－17 $H_{\mathrm{a}}(s)=1.218\ 7\times10^{17}s^3(s^6+6.210\times10^6s^5+1.186\times10^{14}s^4+4.903\times10^{19}s^3+4.672\times10^{27}s^2+9.630\times10^{32}s+6.107\times10^{40})^{-1}$

$L_1=3.035\ \mathrm{mH}$ 串接 $C_1=8.36\ \mathrm{pF}$, $L_2=2.408\ \mu\mathrm{H}$ 并联 $C_2=0.011\ \mu\mathrm{F}$

$L_3=3.035\ \mathrm{mH}$ 串接 $C_3=8.36\ \mathrm{pF}$

10－18 (1) $\Omega_{\mathrm{c}}=625\ \mathrm{Hz}$ (2) $\Omega_{\mathrm{c}}=1\ 250\ \mathrm{Hz}$

10－19 (1) $H(z)=\dfrac{1+\mathrm{e}^{-T}(1-2\mathrm{e}^{-T})z^{-1}}{1-\mathrm{e}^{-T}(1+\mathrm{e}^{-T})z^{-1}+\mathrm{e}^{-3T}z^{-2}}$

(2) $H(z)=\dfrac{1-\mathrm{e}^{-T}\cos(\sqrt{3}T)z^{-1}}{1-2\mathrm{e}^{-T}\cos(\sqrt{3}T)z^{-1}+\mathrm{e}^{-2T}z^{-2}}$

10－21 $H(z)=\dfrac{1-z^{-1}}{(1+a)-(1-a)z^{-1}}, h(n)=\dfrac{1}{1-a}\delta(n)-\dfrac{2a}{1-a^2}\left(\dfrac{1-a}{1+a}\right)^n u(n)$

10－22 (1) $N=3$ (2) $N=2$

10－24 (1) $A=\cot\left(\dfrac{\omega_{\mathrm{p2}}-\omega_{\mathrm{p1}}}{2}\right), B=\dfrac{\cos\left(\dfrac{\omega_{\mathrm{p2}}+\omega_{\mathrm{p1}}}{2}\right)}{\cos\left(\dfrac{\omega_{\mathrm{p2}}-\omega_{\mathrm{p1}}}{2}\right)}$

ω_{p2}和 ω_{p1}分别为带通滤波器上边界和下边界频率

(2) $H(z)=\dfrac{0.02(1-2z^{-2}+z^{-4})}{1-1.636\ 8z^{-1}+2.237\ 6z^{-2}-1.307\ 1z^{-3}+0.641\ 4z^{-4}}$

10－26 $W_{\mathrm{H}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=\dfrac{1}{2}W_{\mathrm{R}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})-\dfrac{1}{4}W_{\mathrm{R}}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\omega-\frac{2\pi}{N-1}\right)}\right]-\dfrac{1}{4}W_{\mathrm{R}}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\omega+\frac{2\pi}{N-1}\right)}\right]$

其中 $W_{\mathrm{R}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega}\dfrac{\sin\left(\dfrac{N}{2}\omega\right)}{\sin\left(\dfrac{\omega}{2}\right)}$

10-28 $h(n)=\frac{2}{\pi(n-\alpha)}\sin[\omega_c(n-\alpha)]\cos[\omega_0(n-\alpha)],\alpha=\frac{N-1}{2}$

10-29 N 为奇数 $h(n)=(-1)^{n-\alpha}\ \frac{\sin[\omega_c(n-\alpha)]}{\pi(n-\alpha)},\alpha=\frac{N-1}{2}$

N 为偶数 $h(n)=(-1)^{\left[n-\left(\frac{N}{2}-1\right)\right]}\ \frac{\sin[\omega_c(n-\alpha)]}{\pi(n-\alpha)},\alpha=\frac{N-1}{2}$

10-30 (1) $\frac{C_C}{C_0}=\frac{C_L}{C_0}=15.91,\frac{C_R}{C_0}=1.414$

(2) $C_C=C_L=15.91\ \text{pF},C_R=1.414\ \text{pF}$

第十一章

11-1 $\beta<1$

11-2 $\beta<-1$

11-3 $-\frac{5}{2}<\beta<\frac{3}{2}$

11-4 $\frac{A_1(s)A_2(s)}{1+A_1(s)F_1(s)+A_1(s)A_2(s)F_2(s)}$

11-5 $A_0(z)+\frac{A_1(z)}{1+A_1(z)F(z)}$

11-6 $A(s)=\frac{R_2}{R_1},F(s)=1$

11-7 $A(s)=K,F(s)=\frac{z_1}{z_1+z_2}$

11-8 第一种可能是 $A(s)=K,F(s)=\frac{z_1}{z_1+z_2}$,且输入信号要经过子系统 $-\frac{z_2}{z_1+z_2}$

另一种可能是 $A(s)=\frac{Kz_2}{z_1+z_2},F(s)=\frac{z_1}{z_2}$,且输入信号要经过倍乘 -1

11-10 当 $K\gg1$ 且 $(1+K)\omega RC\gg1$ 时,可较好地满足近似为积分器的条件。

11-11 (1) $H(s)=\frac{1}{s^2-\frac{g}{L}}$,极点 $s_p=\pm\sqrt{\frac{g}{L}}$,其中一极点位于右半平面,系统不稳定

(2) $H(s)=\frac{1}{s^2-\frac{g}{L}+\frac{K}{L}}$,极点 $s_p=\pm\sqrt{\frac{g-K}{L}}$。当 $K<g$ 有一极点在右半平面,系统不稳定;当 $K=g$ 在 $s=0$ 处有二阶极点,系统不稳定;当 $K>g$ 在 $j\omega$ 轴上有共轭极点,系统处于边界稳定状态,倒立摆以无阻尼方式来回摆动

(3) $H(s)=\frac{1}{s^2+\frac{K_2s}{L}+\frac{K_1-g}{L}}$,极点位于 $s_p=\frac{-K_2\pm\sqrt{K_2^2-4L(K_1-g)}}{2L}$

当 $K_2>0$ 和 $K_1>g$ 时系统稳定

11-12 (1) 当 $K>-1$ 时系统稳定;当 $x(t)=\delta(t)$时,$\lim\limits_{t\to\infty}e(t)=0$;

当 $x(t)=u(t)$时,$\lim\limits_{t\to\infty}e(t)=\frac{1}{K+1}$

(2) 当 $K_1>-1, K_2>0$ 时系统稳定；当 $x(t)=u(t)$ 时，$\lim_{t\to\infty} e(t)=0$，系统可跟踪阶跃信号，而对第(1)问不能跟踪阶跃

(3) 当 $K_3>2, K_2>0, K_1>-1$，且 $(K_3-2)(K_1+1)>K_2$ 时系统稳定(参看习题 11-26 的陈述)；当 $x(t)=u(t)$ 时 $\lim_{t\to\infty} e(t)=0$

11-14 (1) 与实轴交角为 $\frac{l\pi}{3}$，$(l=1,3,5)$

(2) 交点值为 $s=-3$

11-15 (2) $K>20$ 系统不稳定

11-16 (2) 交点值 $s=-4$

(3) $K>6$

11-18 当 $(K-b)^2<4C$ 时呈圆形，圆半径为 $\sqrt{C}$

11-19 (2) $K\approx1.6$ 为边界值，$K<1.6$ 稳定

11-20 (1) 在满足 $K>0$ 之条件下，奈奎斯特图不可能包围 $-1+j0$ 点，系统稳定

(2) 同(1)

(3) $K<4$ 时系统稳定

(4) 同(1)

11-21 (1) 由于 $A(s)F(s)$ 在右半平面有一个极点，可包围 $-1+j0$ 点，$K>1$ 稳定。

(2) 由于 $A(s)F(s)$ 在右半平面有二个极点，围线逆时针绕 $-1+j0$ 点二次，$K>2$ 稳定

11-22 (1) $K>-1$ 稳定

(2) $K>-1$ 稳定

(3) $K>-1$ 稳定

(4) $K>-2$ 稳定

11-23 $0<K<20$ 稳定

11-24 (1) $K<\frac{3}{2}$ 稳定

(2) 由于 $A(z)F(z)$ 在单位圆外有一个极点，围线绕 $-1+j0$ 点，$1<K<3$ 时系统稳定

(3) $A(z)F(z)$ 在单位圆外有一个极点，围线逆时针绕 $-1+j0$ 点一周，$\frac{3}{4}<K<\frac{7}{4}$ 时系统稳定

11-25 对连续系统极点位于虚轴，对离散系统位于单位圆上，冲激响应都为等幅振荡

11-26 (1) 否，(2) 是，(3) 否，(4) 否，(5) 是，(6) 有一极点位于 $s=0$ 处，其他在左半平面

11-27 (a) $H(s)=\dfrac{H_1H_2H_3H_4}{1+H_2H_3G_3+H_3H_4G_4+H_1H_2H_3G_2-H_1H_2H_3H_4G_1}$

(b) $H(s)=H_1H_6(H_2H_4+H_3H_5)/[1+G_1H_1+G_2(H_4+H_5)$
$+G_3H_1H_6(H_2H_4+H_3H_5)+G_4H_1H_6(H_2H_4$
$+H_3H_5)+G_1G_2H_1(H_4+H_5)]$

11－28 (a) $H=\dfrac{ac+e}{1-ab-cd-edb}$

(b) $\dfrac{Y}{X_1}=\dfrac{ae}{1-cd}$, $\dfrac{Y}{X_2}=\dfrac{bce}{1-cd}$

11－29 (a) $H(s)=H_1H_2H_3H_4H_5+H_1H_6H_5(1-G_3)/[1-(H_2G_2+H_2H_3G_1+G_3+H_4G_4+G_4G_1H_6)+H_2G_2H_4G_4+H_2G_2G_3]$

(b) 令 $\Delta=1-(H_2G_2+H_2H_3G_1+G_3+H_4G_4+G_4G_1H_6)+H_2G_2H_4G_4+H_2G_2G_3$

$$H_{11}(s)=\frac{Y_1(s)}{X_1(s)}=\frac{1}{\Delta}[H_1H_8(1-H_4G_4-G_3)]$$

$$H_{21}(s)=\frac{Y_2(s)}{X_1(s)}=\frac{1}{\Delta}[H_1H_2H_3H_4H_5+H_1H_6H_5(1-G_3)]$$

$$H_{12}(s)=\frac{Y_1(s)}{X_2(s)}=\frac{1}{\Delta}[H_7G_4G_1H_8]$$

$$H_{22}(s)=\frac{Y_2(s)}{X_2(s)}=\frac{1}{\Delta}[H_7H_5(1-G_3-H_2G_2-H_2H_3G_1+G_2H_2G_3)]$$

11－31 $\dfrac{V_o}{V_S}=-\dfrac{R_c\beta}{r_{be}+(1+\beta)R_e}$

11－32 $H(z)=\dfrac{1+0.2z^{-1}-0.2z^{-2}}{1-0.2z^{-1}+0.3z^{-2}+z^{-3}}$

第十二章

12－1

$$A=\begin{bmatrix}-2 & -1\\ -1 & -2\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

$$C=[0\quad 1]\qquad D=0$$

12－2

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$$

$$C=[1\quad 1]$$

12－3

$$\begin{cases}\dot\lambda_1(t)=-\dfrac{b}{a}\lambda_1(t)+\lambda_2(t)\\[2mm] \dot\lambda_2(t)=-\dfrac{c}{a}\lambda_1(t)+\lambda_3(t)\\[2mm] \dot\lambda_3(t)=-\dfrac{d}{a}\lambda_1(t)\end{cases}$$

$$r(t)=\dot y(t)=-\frac{b}{a^2}\lambda_1(t)+\frac{1}{a}\lambda_2(t)$$

12－4

$$\begin{cases}\dot\lambda_1(t)=-3\lambda_1(t)+8e_1(t)+7e_2(t)\\ \dot\lambda_2(t)=2\lambda_1(t)-\lambda_2(t)+4e_1(t)+e_2(t)\end{cases}$$

$$r(t)=2\lambda_1(t)+3\lambda_2(t)$$

12-5

$$\begin{cases}\lambda_1(n+1)=\lambda_2(n)\\ \lambda_2(n+1)=a\lambda_1(n)+\lambda_3(n)\\ \lambda_3(n+1)=\lambda_4(n)\\ \lambda_4(n+1)=b(a-1)\lambda_1(n)-a\lambda_2(n)+x(n)\end{cases}$$

$$y(n)=\lambda_1(n)$$

12-6 (1) $\alpha_1=-a_1\quad \alpha_2=-a_2$

$$\begin{bmatrix}\beta_0\\ \beta_1\\ \beta_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\ a_1&1&0\\ a_2&a_1&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}b_0\\ b_1\\ b_2\end{bmatrix}$$

(2) $\alpha_1=-4,\alpha_2=-3,\beta_0=1,\beta_1=2,\beta_2=-3$

12-7 (a) 状态方程和输出方程为

$$\begin{cases}\dot\lambda_1(t)=-c\lambda_1(t)+K\lambda_2(t)\\ \dot\lambda_2(t)=\lambda_3(t)+e(t)-\lambda_1(t)\\ \dot\lambda_3(t)=(-a+c)\lambda_1(t)-c\lambda_3(t)+(a-c)e(t)\end{cases}$$

$$r(t)=\lambda_1(t)$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 为状态变量

(b) 选择各一阶系统的状态变量分别以 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 表示。状态方程和输出方程为

$$\begin{cases}\dot\lambda_1(t)=-b\lambda_1(t)+(c-b)\lambda_2(t)+(b-c)\lambda_3(t)+(c-b)e(t)\\ \dot\lambda_2(t)=-a\lambda_2(t)+(a-b)\lambda_3(t)+(b-a)e(t)\\ \dot\lambda_3(t)=\lambda_1(t)+\lambda_2(t)-(c+1)\lambda_3(t)+e(t)\end{cases}$$

$$r(t)=\lambda_1(t)+\lambda_2(t)-\lambda_3(t)+e(t)$$

12-8 在题图 12-8 中取下列状态变量:垂直位置电感中的电流 λ_1(方向自上而下),水平位置电感中的电流 λ_2(方向自左而右),电容电压 λ_3 和 λ_4(方向左正右负),建立如下状态方程和输出方程

$$\begin{cases}\dot\lambda_1(t)=-\frac{R}{2L}\lambda_1(t)-\frac{1}{2L}\lambda_3(t)+\frac{1}{2L}\lambda_4(t)+\frac{1}{2L}e(t)\\ \dot\lambda_2(t)=\frac{1}{L}\lambda_3(t)+\frac{1}{L}\lambda_4(t)\\ \dot\lambda_3(t)=\frac{1}{2C}\lambda_1(t)-\frac{1}{C}\lambda_2(t)-\frac{1}{2RC}\lambda_3(t)-\frac{1}{2RC}\lambda_4(t)+\frac{1}{2RC}e(t)\\ \dot\lambda_4(t)=-\frac{1}{2C}\lambda_1(t)-\frac{1}{C}\lambda_2(t)-\frac{1}{2RC}\lambda_3(t)-\frac{1}{2RC}\lambda_4(t)+\frac{1}{2RC}e(t)\end{cases}$$

$$r(t)=-\frac{R}{2}\lambda_1-\frac{1}{2}\lambda_3-\frac{1}{2}\lambda_4+\frac{1}{2}e(t)$$

12-9 $e^{At}=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}(e^{t}-e^{-t}) & \frac{1}{2}(e^{t}+e^{-t})-1\\ 0 & \frac{1}{2}(e^{t}+e^{-t}) & \frac{1}{2}(e^{t}-e^{-t})\\ 0 & \frac{1}{2}(e^{t}-e^{-t}) & \frac{1}{2}(e^{t}+e^{-t})\end{bmatrix}$

12-10 $\begin{cases}\lambda_1(t)=10e^{2t}-7e^{3t}\\ \lambda_2(t)=-5e^{2t}+7e^{3t}\end{cases}$

12-11 设 λ_1 为该城市人口数，λ_2 为外地人口数，n 为年

$$\begin{cases}\lambda_1(n+1)=(1+\gamma)[(1-\beta)\lambda_1(n)+\alpha\lambda_2(n)]\\ \lambda_2(n+1)=(1+\gamma)[\beta\lambda_1(n)+(1-\alpha)\lambda_2(n)]\end{cases}$$

为预测未来人口数，还需知道某起始年份的人口数 $\lambda_1(0)$ 和 $\lambda_2(0)$ 作为起始条件即可求解

12-12

(1) $\begin{cases}\lambda_1(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u(n-1)\\ \lambda_2(n)=\frac{1}{6}\left[7\left(\frac{1}{2}\right)^{1-n}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]u(n-1)\end{cases}$

$y(n)=h(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}u(n-1)$

(2) $y(n)-\frac{1}{2}y(n-1)=2x(n-1)$

12-13 (1) $a=3\quad b=-4$

(2) $\begin{cases}\lambda_1(n)=4(-1)^n-2(-2)^n\\ \lambda_2(n)=4(-1)^n-3(-2)^n\end{cases}$

12-14 (1) $\begin{cases}\lambda_1(n)=[1+(-1)^n](\sqrt{2})^n\\ \lambda_2(n)=[(1-\sqrt{2})+(-1)^n(1+\sqrt{2})](\sqrt{2})^n\end{cases}$

(2) $y(n)-4y(n-2)=x(n)-4x(n-2)$

(3) $y(n)=3.2^n+2(-2)^n$

差分方程的特解等于 0

12-15 证明 $h_1(t)=\int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Be(\tau)d\tau\mid_{e(\tau)=\delta(\tau)}=Ce^{At}B$

$h_2(t)=\int_0^t B^{T}e^{-A^{T}(t-\tau)}C^{T}e(\tau)d\tau\mid_{e(\tau)=\delta(\tau)}=B^{T}e^{-A^{T}t}C^{T}$

$[h_2(t)]^{T}=h_2(t)=[B^{T}e^{-A^{T}t}C^{T}]^{T}=Ce^{-At}B=h_1(-t)$

12-16 (1) 系统可控，但不可观

(2) $H(s)=\frac{1}{(s+1)^2}$

12-17 $M=\begin{bmatrix}1 & -3\\ 1 & -3\end{bmatrix},N=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix}$

因此,系统不完全可控,完全可观

$$H(s) = \frac{1}{s+3}$$

12-18 (1) $\hat{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \hat{\boldsymbol{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \hat{\boldsymbol{C}} = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 1]$

(2) 不完全可控,不完全可观

(3) $H(s) = \frac{1}{s-4}$

12-19 (1)

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1(t) \\ \dot{\lambda}_2(t) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc:c} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 0 \\ \hdashline 2 & 1 & -2 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} e(t)$$

$$r_2(t) = [0, 0 \;\vdots\; 1] \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{bmatrix}$$

(2) 该串联系统不可控,但可观

(3) $H_1(s) = \frac{(s+2)}{(s+1)(s+3)}$

$$H_2(s) = \frac{1}{s+2}$$

$$H(s) = H_1(s)H_2(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)}$$

即串联后有零极相消现象

12-21 (1) $\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{L}(g-K_1) & -\frac{K_2}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$

(2) $|\alpha \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \alpha^2 + \left(\frac{K_2}{L}\right)\alpha + \frac{1}{L}(K_1 - g)$

$$\alpha_{1,2} = \frac{-K_2 \pm \sqrt{K_2^2 - 4L(K_1 - g)}}{2L}$$

(3) $K_2 > 0, K_1 > g$ 时系统稳定,与习题 11-11 结果相同

索　引

二　画

二维变换　two-dimensional transform　2,169,175

二相键控(2PSK)　two phase shift keying　163

几何级数　geometric series　378

　　～的求值　evaluation of ～

四　画

双边 z 变换　bilateral(two-sided) z transform　45,46

双线性变换　bilinear transformation　233

巴特沃思逼近　Butterworth approximation　186

切比雪夫逼近　Chebyshev approximation　191

开关电容滤波器(SCF)　Switched-Capacitor Filter　258

开环系统　open-loop system　274

反馈系统　feedback system　273

无源一端口综合　passive one-port synthesis　198

无源二端口综合　passive two-port synthesis　202

比例－微分(PD)控制　proportional-plus-differential control　318

比例－积分(PI)控制　proportional-plus-integral control　318

比例－积分－微分(PID)控制　proportional-plus-integral-plus-differential control　281,318

内插公式　interpolation formula　141

内插函数　interpolation function　141,142

支路　branch　306

五　画

主值序列　principal value sequence　126

主值区间　principal value region　126

卡尔曼 Kalman 324
正实函数 positive real function 202
可观测性 observability 324,362
可控制性 controllability 324,362
功率谱 power spectrum 156
对角线矩阵 diagonal matrix 337
矢量微分方程 vector differential equation 341
矢量差分方程 vector difference equation 353
边界条件 boundary condition 21
边界稳定系统(临界稳定系统) marginal stable system 283,284
正交频分复用(OFDM) orthogonal frequency division multiplexing 160
正交相移键控(QPSK) quadrature phase shift keying 163
四相键控(4PSK) four phase shift keying 163

六　画

因果系统 causal system 29
因果性 causality 29
自然顺序 natural order 150
自激振荡 self-sustained osillation 283,284
收敛域(ROC) region of convergence 50
多载波调制(MCM) multicarrier modulate 161
齐次解 homogeneous solution 16
冲激不变法 impulse invariance 106,228
并矢(并元)卷积 dyadic convolution 169
并矢(并元)相关 dyadic correlation 169
约当矩阵 Jordan matrix 338
达林顿 Darlington 202,203
同态滤波 homomorphic filtering 113
闭环系统 closed-loop system 274
有源滤波器(*RC* 有源滤波器) active filter 254
考尔 Cauer 198

七　画

库利－图基算法 Cooley-Tukey algorithm 118,152
时移 shifting 64,130
时间有限信号 time-finite signal 157
快速傅里叶变换(FFT) fast Fourier transform 118,142

均匀性(齐次性) homogeneity 9
围线积分法 contour integral method 56
极点 pole 56,85,86,98
初值定理 initial value theorem 68
系统函数 system function 83
系统的仿真 simulation of system 303
沃尔什变换 Walsh transform 165
序列 sequence 3
　单位样值～ unit sample～ 5
　(单位冲激～) (unit impulse～) 5
　单位阶跃～ unit step～ 6
　矩形～ rectangular～ 6
　斜变～ ramp～ 7
　指数～ exponential～ 7
　正弦～ sinusoidal～ 7
　复指数～ complex exponential～ 8
　周期～ periodic～ 124
　有限长～ finite length～ 124
序列的傅里叶变换(离散时间傅里叶变换 DTFT)
　　discrete time Fourier transform 88
状态 state 326
　～变量 ～variable 326
　～矢量 ～vector 326
　～空间 ～space 326
　～轨迹 ～trajectory 326
　～方程 ～equation 328,330
　～转移矩阵 ～transition matrix 342
即位运算 in-place computation 150
均衡 equalization 161

八　画

卷积 convolution 31
卷积和 convolution sum 31
迭代法 iteration method 16
码位倒读(比特倒置) bit-reversal 150
单边 z 变换 single (one) sided z transform 45
终值定理 final value theorem 69
留数 residue 56

软件无线电 software radio 2
奈奎斯特稳定性判据 Nyquist stability criterion 296
罗斯判据 Routh criterion 321
帕塞瓦尔定理 Parseval theorem 139
泄漏 leakage 157
转移函数 transfer function 306
范德蒙德矩阵 Vandermonde matrix 21

九 画

相关 correlation 138,156
相加器 summer 10
信号流图 signal-flow graph 303
矩阵的秩 rank of matrix 365,366
矩阵指数 matrix exponetial 341
响应 response
  零输入～ zero-input～ 16,22
  零状态～ zero-state～ 16,22
  强迫～ forced～ 22
  自由～ natural～ 22
  瞬态～ transient～ 115
  稳态～ steady-state～ 95,96,115
  完全～ complete～ 21
  单位样值(冲激)～ unit sample(impulse)～ 27
  阶跃～ step～ 42
费班纳西数列 Fibonacci sequence of numbers 15
逆系统 inverse system 279
结点 node 306
  输入～(源点) source～ 306
  输出～(阱点) sink～ 306
洛朗级数 Laurent series 45

十 画

样值 sample 3
差分方程 difference equation 11
特解 particular solution 21
特征方程 characteristic equation 17
特征根 characteristic root 17

特征矩阵 characteristic matrix 342
起始值 original value 12
海诺塔 tower of Hanoi 41
倒立摆 inverted pendulum 276,317,376
根轨迹 root-locus 287
积分器 integrator 261
流图转置 transpose of flow graph 308
圆周移位 circular shifting 130
圆卷积 circular convolution 132
部分分式展开法 partial fraction expansion method 59
通路 path 306
  开～ open～ 306
  闭～ closed～ 306
  前向～ forward～ 306

十 一 画

基带信号 baseband signal 162,164
离散时间信号 discrete-time signal 3
离散傅里叶变换(DFT) discrete Fourier transform 124,127
离散傅里叶逆变换(IDFT) inverse discrete Fourier transform 127
离散傅里叶级数(DFS) discrete Fourier series 124
离散时间傅里叶变换(DTFT 序列的傅里叶变换) 89
  discrete time Fourier transform
离散沃尔什变换(DWT) 165,166
  discrete Walsh transform
离散余弦变换(DCT) 174
  discrete cosine transform
维纳 Wiener 274
混叠 aliasing 157
梅森公式 Mason formula 311
萨林－基 Sallen-Key 255

十 二 画

窗函数 window function 245,248
棣美弗 Demoivre 44
幂级数 power series 57
  ～展开法 ～expansion method 57
策动点函数 driving point function 198

十 三 画

叠加性 supperposition property 9
零点 zero 84,98,99
频率响应 frequency response 95
频率有限信号 frequency finite signal 157
频率变换 frequency transform 214
解卷积(反卷积) deconvolution 35
数字滤波器 digital filter 182,224
　递归式～ recursive～ 238
　非递归式～ nonrecursive～ 252
　有限冲激响应～ finite impulse response(FIR)～ 227
　无限冲激响应～ infinite impulse response(IIR)～ 240
数字－模拟转换 Digital-to-Analog(D/A)conversion 2,183
数字化世界 digitize world 2
数据压缩 data compression 169
输出方程 output equation 329
福斯特 Foster 198

十 四 画

模拟－数字转换 Analog-to-Digital(A/D)conversion 2,183
稳定性 stability 29
稳定系统 stable system 30
算子 operator 26
　移序～ sequency shift operator 26
算子符号 operational notation 26
影像参数法 image parameter method 267

十 五 画

蝶形流程图 butterfly flow graph 146
蝶形计算 butterfly computation 146

参考书目

[1] 郑君里,杨为理,应启珩.信号与系统(上册、下册)[M].1版.北京:人民教育出版社(高等教育出版社),1981.

[2] 郑君里,应启珩,杨为理.信号与系统(上册、下册)[M].2版.北京:高等教育出版社,2000.

[3] 郑君里,应启珩,杨为理.信号与系统引论[M].北京:高等教育出版社,2009.

[4] 郑君里.教与写的记忆——信号与系统评注[M].北京:高等教育出版社,2005.

[5] 谷源涛,应启珩,郑君里.信号与系统——MATLAB综合实验[M].北京:高等教育出版社,2008.

[6] 常迵.无线电信号与线路原理(上册、中册)[M].北京:高等教育出版社,1965.

[7] 管致中,夏恭恪,孟桥.信号与线性系统(上册、下册).4版.北京:高等教育出版社,2004.

[8] 吴大正,杨林耀,张永瑞,等.信号与线性系统分析[M].4版.北京:高等教育出版社,2005.

[9] 朱钟霖.信号与线性系统分析[M].北京:中国铁道出版社,1993.

[10] 张谨,赫慈辉.信号与系统[M].北京:人民邮电出版社,1987.

[11] 芮坤生.信号分析与处理[M].北京:高等教育出版社,2003.

[12] 吴湘淇.信号、系统与信号处理(上册、下册)[M].北京:电子工业出版社,1996.

[13] Oppenheim A V, Willsky A S, Nawab S H. Signals and Systems[M].2nd ed. Prentice-Hall,1997.
中译:刘树棠译.信号与系统[M].西安:西安交通大学出版社,1998.

[14] McC W. Siebert. Circuits, Signals, and Systems[M]. The MIT Press McGraw-Hill Book Company, 1986.
中译:朱钟霖,周宝珀译.电路、信号与系统[M].北京:科学出版社,1991.

[15] Haykin Simon, Barry Van Veen. Signals and Systems[M]. 2nd ed. John Wiley & Sons, Inc, 2003.

中译:林秩盛,等译.信号与系统[M].北京:电子工业出版社,2004.

[16] Lee Edward A, Varaiya Pravin, Structure and Interpretation of Signals and Systems [M]. Pearson Education, Inc. 2003.
中译:吴利民,等译.信号与系统结构精析[M].北京:电子工业出版社,2006.

[17] Kamen Edward W, Heck Bonnie S. Fundamentals of Signals and Systems Using the Web and MATLAB [M]. Prentice Hall, 2000.
中译:高强等译.应用 Web 和 MATLAB 的信号与系统基础[M].北京:电子工业出版社,2002.

[18] Ambardar Ashok. Analog and Digital Signal Processing [M]. 2nd ed. Thomson, 1999.
中译:冯博琴,等译.信号、系统与信号处理[M].北京:机械工业出版社,2001.

[19] Girod Bernd, Rabenstein Rudolf, Stender Alexander. Signals and Systems [M]. John Wiley & Sons, Inc. 2001.

[20] Lindner Douglas K. Introduction to Signals and Systems [M]. McGraw-Hill, 1999.

[21] Roberts Michael J. Signals and Systems Analysis Using Transform Methods and MATLAB [M]. McGraw-Hill, 2004.
中译:胡剑凌,等译.信号与系统[M].北京:机械工业出版社,2006.

[22] Lath B P. Linear Systems and Signals [M]. Oxford University Press, 2004.
中译:刘树堂,等译.线性系统与信号[M].西安:西安交通大学出版社,2006.

[23] McClellan J H, Schafer R W, Yoder M A. Signal Processing First [M]. Prentice-Hall, 2003.
中译:周利清,等译.信号处理引论[M].北京:电子工业出版社,2005.

[24] Mason S J, Zimmerman H J. Electronic Circuits, Signals and Systems [M]. John Wiley & Sons, Inc, 1960.

[25] Cheng D K(郑钧). Analysis of Linear Systems [M]. Addison-wesly, 1959.
中译:毛培法译.线性系统分析[M].北京:科学出版社,1979.

[26] Liu C L, Liu Jane W S. Linear Systems Analysis [M]. McGraw-Hill, Inc, 1975.

[27] Papoulis A. Circuit and System: A Modern Approach [M]. HRW, 1980.

中译:葛果行,等译.电路与系统——模拟与数字新讲法[M].北京:人民邮电出版社,1983.

[28] Gabel R A, Roberts R A. Signals and Linear systems [M]. 3rd ed. John Wiley and Sons, Inc., 1987.

[29] McGillem C D, Cooper G R. Continuous and Discrete Signal and System Analysis [M]. 3rd ed. Holt, Rinehart and Winston, Inc. 1991.

[30] Ziemer R E, Tranter W H, Fannin D R. Signals and Systems: Continuous and Discrete [M]. 4th ed. Prentice-Hall, Inc., 1998.
中译:肖志涛,等译.信号与系统——连续与离散[M].北京:电子工业出版社,2005.

[31] Kwakernaak H and Sivan R. Modern Signals and Systems [M]. Prentice-Hall, Inc., 1991.

[32] Poularikas A D, Seely S. Signals and Systems [M]. 2nd ed. PWS-KNET Publishing Company, 1991.

[33] Jackson L B. Signals, Systems and Transforms [M]. Addison-Wesley Publishing Company, 1991.

[34] Papoulis A. The Fourier Integral and Its Applications [M]. McGraw-Hill, Inc., 1962.

[35] Phillips C I. Signals, Systems and Transforms [M]. 3rd ed. Prentice-Hall, 2003.

[36] Chen Chi-Tsong. Signals and Systems [M]. Oxford University Press, 2004.

[37] Cha Philip D, Molinder John I. Fundamentals of Signals and Systems A building block approach [M]. Cambridge University Press, 2006.

[38] Sundararajan D. A Practical Approach to Signals and Systems [M]. John Wiley & Sons, Inc., 2008.

[39] Burrus C Sidney, et al. Computer-Based Exercises for Signal Processing using MATLAB [M]. Prentice-Hall, Inc., 1994.

[40] Stonick Virginia, Bradley Kevin. Labs for Signals and Systems Using MATLAB [M]. PWS Publishing Company, 1996.

[41] 郑君里,谷源涛.信号与系统课程历史变革与进展[C]//电子电气课程报告论坛论文集2008.北京:高等教育出版社,2009.

SIGNALS & SYSTEMS

信号与系统课程系列教材

主教材	信号与系统（第三版）上、下册（第一版1981，第二版2000）	郑君里 应启珩 杨为理
简明版教材	信号与系统引论	郑君里 应启珩 杨为理
学习指导书	教与写的记忆——信号与系统评注	郑君里
实验教材	信号与系统——MATLAB综合实验	谷源涛 应启珩 郑君里
习题解析	信号与系统（第三版）习题解析	谷源涛

ISBN 978-7-04-031518-9

9 787040 315189 >

定价 37.70元